

1. (5 bodov) Priamym výpočtom ukážte, že platí

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Vysvetlite súvislosť s výsledkom príkladu č. 3.

2. (AF str. 226 – 230) (15 bodov) Nájdite krivkový integrál

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \pi \cot \pi \zeta \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta, \quad (z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

kde  $C$  je hranica obdĺžnikovej oblasti  $x \in [-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2}]$ ,  $y \in [-N, N]$  a  $z$  je vo vnútri tejto oblasti.

Ukážte, že z toho vyplýva

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right).$$

3. (10 bodov) Ukážte, že platí

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}$$

logaritmickým derivovaním oboch strán a použitím výsledku príkladu č. 2, resp. DÚ 6.

4. (AF 3.6.9) (15 bodov) Nech  $f(z)$  má jednoduché póly pre  $z = z_n \in D_N$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  so silou  $a_n$  a je analytická vo zvyšku oblasti  $D_N$ . Ukážte, že pre  $z \in D_N$  platí

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{z_n - z},$$

kde  $C_N$  je hranica oblasti  $D_N$ .

Odvoďte, odpočítaním hodnoty pre  $z = 0$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = f(z) - f(0) + \sum_{n=1}^N a_n \left( \frac{1}{z_n - z} - \frac{1}{z_n} \right).$$

Ukážte, že z ohraničenosti  $f(z)$  pre veľké  $z$  dostaneme pre kruhovú oblasť  $D_N$  s polomerom  $R_N$  na pravej strane nulu, keď  $R_N \rightarrow \infty$ .

Podobne nájdite príslušný krivkový integrál, ktorý dá

$$f(z) - f(0) - zf'(0) - \dots - \frac{z^k f^{(k)}(0)}{k!} + \sum_{n=1}^N a_n \left( \frac{1}{z_n - z} - \frac{1}{z_n} - \frac{z}{z_n^2} - \dots - \frac{z^k}{z_n^{k+1}} \right).$$

Aká je postačujúca podmienka na  $f(z)$  pre veľké  $z$  aby sa v limite  $R_N \rightarrow \infty$  krivkový integrál na ľavej strane vynuloval? T.j. ako sa má správať  $f(z)$  rodu  $k$ ?

Pozn. Členy, ktoré sme tu do sumy čiastočných zlomkov vkladali sú práve opravné členy z Mittag-Lefflerových rozkladov.