Komplexná analýza II. – Úloha č. 9

Termín odovzdania: 15. december 2022

---

1. (Stein, Shakarchi, 7.1, str. 199–200) *(10 bodov)* Predpokladajme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel, pre ktorú sú čiastkové súčty

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n$$

ohraničené. Ukážte, že *Dirichletov rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

konverguje pre $\mathrm{Re}(s) > 0$ a dáva holomorfnú funkciu v tejto polrovine.

Návod: Použite "sčítanie per partes" pre porovnanie pôvodného (nie nutne absolútne konvergentného) radu s (absolútne konvergentným) radom $\sum A_n(n^{-s} - (n+1)^{-s})$. Odhad pre výraz v zátvorke sa dá dostať pomocou vety o strednej hodnote.

2. (Stein, Shakarchi, 7.2) *(10 bodov)* Prepojte násobenie Dirichletových radov s vlastnosťami deliteľnosti ich koeficientov.

(a) Ukážte, že ak $\{a_m\}$ a $\{b_k\}$ sú dve ohraničené postupnosti komplexných čísel, potom

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \qquad \text{, kde } c_n = \sum_{mk=n} a_m b_k.$$

Navyše, tieto postupnosti konvergujú absolútne pre $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(b) Ako dôsledok ukážte, že

$$(\zeta(s))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} \qquad \text{a} \qquad \zeta(s)\zeta(s-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^s}$$

pre $\mathrm{Re}(s) > 1$ a $\mathrm{Re}(s-a) > 1$. Symbolom $d(n)$ označujeme počet deliteľov n a $\sigma_a(n)$ je súčet a-tych mocnín deliteľov n. Špeciálne, pre $a = 0$ máme $\sigma_0(n) = d(n)$.

3. (Stein, Shakarchi, 7.3) *(10 bodov)* Uvažujme Dirichletov rad pre $1/\zeta$.

(a) Ukážte, že pre $\mathrm{Re}(s) > 1$ platí

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

kde $\mu(n)$ je *Möbiova funkcia* definovaná ako

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{ak } n = 1, \\ (-1)^k & \text{ak } n = p_1 p_2 \dots p_k \text{ a } p_j \text{ sú navzájom rôzne prvočísla,} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Všimnite si, že $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ pre n a m nesúdeliteľné.
Návod: Eulerova súčinová formula pre $\zeta(s)$.

(b) Ukážte, že

$$\sum_{k|n} \mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{ak } n = 1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

4. (Stein, Shakarchi, 7.4) *(15 bodov)* Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel, pre ktorú $a_n = a_m$ ak $n \equiv m \mod q$ pre nejaké prirodzené číslo q. Definujme *Dirichletov L-rad* pridružený k postupnosti $\{a_n\}$ ako

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad \text{pre } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Tiež, položiac $a_0 = a_q$, majme

$$Q(x) = \sum_{m=0}^{q-1} a_{q-m} e^{mx}.$$

Ukážte, podobne ako v úlohách 3 a 4 v DÚ 8, že

$$L(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{Q(x) x^{s-1}}{e^{qx} - 1} dx, \qquad \text{pre } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Následne ukážte, že $L(s)$ sa dá rozšíriť v celej komplexnej rovine s jedinou možnou singularitou – jednoduchým pólom v $s = 1$. V skutočnosti, $L(s)$ bude regulárna v $s = 1$ práve vtedy, keď $\sum_{m=0}^{q-1} a_m = 0$.

5. (Stein, Shakarchi, 7.7) *(10 bodov)* Ukážte, že pre reálne s, resp. ak $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, je funkcia

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$$

reálna.