Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 10

Cvičenia v týždni 13. apríla 2009 - Vlastné hodnoty a vektory

---

1. Majme matice A a B. Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.

2. Derivácia všeobecného polynómu $a + bx + cx^2 + dx^3$ stupňa 3 má tvar $b + 2cx + 3dx^2$. Pripomeňme si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.
a) Nájdite maticu D zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.

$$D \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vypočítajte D^4 a vysvetlite výsledok v reči derivácií.
c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice D?

3. a) Nájdite nenulovú maticu N, takú aby $N^3 = 0$.
b) Ukážte, že ak $Nx = \lambda x$, potom λ musí byť nula.
c) Dokážte, že N (ktorá sa nazýva *nilpotentná*) nemôže byť symetrická.

4. Aké sú vlastné hodnoty matice A spĺňajúcej $A^2 = -I$? Ak A je taká reálna $n \times n$ matica, ukážte, že potom n musí byť párne. Uveďte príklad.

5. Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica J *nie je podobná* matici K:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{a} \quad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Pre ľubovľnú maticu M provnajte JM a MK. Ak sa rovnajú, ukážte, že M nie je invertibilná, a teda rovnosť $M^{-1}JM = K$ nemôže nastať.

Dodatočné úlohy

6. Ak je matica K anti-symetrická, ukážte, že matica $Q = (I - K)(I + K)^{-1}$ bude ortogonálna. Nájdite Q pre $K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

7. Nech A je nilpotentná matica (t.j. $A^k = 0$ pre nejaké k). Ukážte, že $\det(A + I) = 1$.

8. Predpokladajme, že matice A a B sa dajú diagonalizovať tou istou diagonalizačnou maticou S, teda máme $A = S\Lambda_1 S^{-1}$ a $B = S\Lambda_2 S^{-1}$. Ukážte, že potom matice A a B komutujú a tiež, že vlastné hodnoty súčinu AB sú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B. Ako je to s vlastnými vektormi?

9. Predpokladajme, že každá z matíc A a B má n rôznych vlastných hodnôt. Navyše predpokladajme, že matice A a B komutujú. Ukážte potom, že ak x je vlastný vektor matice A, potom je aj vlastným vektorom matice B. Výjdite z rovnosti $ABx = BAx$.
Pozn. Keďže toto platí pre každý vlastný vektor matice A, matice A a B majú rovnaké všetky vlastné vektory, a preto majú tú istú diagonalizačnú maticu S. Ukázali sme tak spolu s príkladom č. 10, že (diagonalizovateľné) matice komutujú práve vtedy, keď majú rovnaké vlastné vektory.