

1. Opíšte slovne (t.j. akú transformáciu reprezentujú) všetky matice, ktoré sú podobné matici $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ a nájdite zopár príkladov.

2. Vypíšte všetky možnosti pre Jordanov tvar 5×5 matice, ktorá má nulu ako päťnásobnú vlastnú hodnotu. (Zvykom býva začať väčšími blokmi v ľavom hornom rohu a postupne prejsť k najmenším idúc dole po diagonále matice J .)

Pre všetky možnosti nájdite charakteristický a minimálny polynóm, ako aj počty lineárne nezávislých vlastných vektorov.

3. a) Použitím Cayley–Hamiltonovej vety nájdite vzorec pre A^{-1} obsahujúci mocniny matice A , det A a koeficienty jej charakteristického polynómu.

b) Overte správnosť tohto vzorca pre 2×2 matice priamym výpočtom.

4. a) Nájdite 3×3 matice A_1, A_2 zodpovedajúce kvadratickým formám

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

$$f_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

b) Ukážte, že forma f_1 sa dá napísať ako *jeden* štvorec, a teda nie je kladne definitná. Pre aké hodnoty je f_1 rovná nule?

c) Nájdite rozklad A_2 ako LL^T (L je dolná trojuholníková matica). Vyjadrite f_2 ako súčet troch štvorcov.

5. Ukážte, že ak sú matice A a B podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$, potom sú ich minimálne polynómy $m_A(x)$ a $m_B(x)$ rovnaké.

Dodatočné úlohy

6. Ak má 3×3 matica A vlastné hodnoty λ_1, λ_2 a λ_3 , čo budú vlastné hodnoty matice $(A - \lambda_3I)(A - \lambda_2I)(A - \lambda_1I)$? Čo to bude za matica?

7. Ukážte, že A^T je vždy podobná matici A . Vieme, že vlastné hodnoty majú rovnaké, problém by mohol byť v štruktúre vlastných vektorov.

a) Pre A skladajúcu sa z jedného bloku J_i nájdite maticu M_i takú aby $M_i^{-1}J_iM_i = J_i^T$.

b) Pre A v Jordanovom tvare poskladajte maticu M_0 z menších blokov tak, aby $M_0^{-1}JM_0 = J^T$.

c) Pre všeobecnú maticu $A = MJM^{-1}$ ukážte, že A^T je podobná J^T a tým pádom aj J a A .

8. Nech $n \times n$ matica A reprezentuje lineárne zobrazenie $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ukážte, že vlastné podpriestory V_λ , zložené z príslušných zovšeobecnených vlastných vektorov matice A , sú invariantné vzhľadom na lineárnu transformáciu T , t.j. $T(V_\lambda) = V_\lambda$.

9.) Pre aké hodnoty parametra a je matica A kladne definitná?

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$