

1. Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2.$$

2. Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, kladne semidefinitné alebo indefinitné

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. S prihliadnutím na vlastné hodnoty ukážte, že ak je matica  $A$  kladne definitná, potom sú aj matice  $A^2$  a  $A^{-1}$  kladne definitné.

4. Elipsa  $u^2 + 4v^2 = 1$  zodpovedá matici  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ . Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice  $A$  a načrtnite elipsu. Spravte to isté pre elipsu  $5u^2 + 8uv + 5v^2 = 1$ .

### Dodatočné úlohy

5. Ukážte, že ak sú matice  $A$  a  $B$  kladne definitné, potom je takou aj matica  $A + B$ .
6. Ak je matica  $A$  symetrická a kladne definitná a  $C$  je regulárna, ukážte, že matica  $B = C^T A C$  je tiež symetrická a kladne definitná.
7. Ak je  $C$  regulárna matica, ukážte, že  $A$  a  $C^T A C$  majú rovnakú hodnotu. Teda nula ako vlastná hodnota má pre obe matice rovnakú násobnosť.

8. Experimentovaním zistite signatúru  $2n \times 2n$  matice

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

kde  $B$  je regulárna  $n \times n$  matica.

9. Nech  $A$  je symetrická a kladne definitná matica. Ukážte, že jej maximálne zložky sa musia nachádzať na diagonále.