Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 3

Cvičenia v týždni 23. februára 2009 - Afinné priestory a sústavy rovníc

---

1. Označme ako V_1 množinu riešení rovnice $u+v+w=2$ – je to nadrovina v $\mathbb{R}^3$ a súčasne dvojrozmerný afinný podpriestor $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Podobne nech V_2 označuje množinu riešení rovnice $u+3v+3w=0$.

Pre priestory V_1 a V_2 nájdite vyjadrenie v tvare (bod + vektorový priestor). Ukážte, že prienik $V_1 \cap V_2$ zodpovedá presne priestoru W riešení sústavy rovníc:

$$u+v+w=2 \qquad u+3v+3w=0$$

2. Priamku prechádzajúcu cez koncové body vektorov u a v môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov $P=\{tu+(1-t)v \mid t\in\mathbb{R}\}$. Ukážte, že každá lineárna tansformácia zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov x a y sa zobrazí na stred úsečky z xA do yA.

3. Nájdite parametrické rovnice roviny, ktorá prechádza trojicami bodov:
a) $(1,3,2)$, $(4,1,-1)$, $(2,0,0)$,
b) $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$,
c) $(2,-1,3)$, $(1,1,1)$, $(3,0,4)$.

4. Nájdite predpis afinnej transformácie priestoru $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, ktorá zobrazuje trojuholník s vrcholmi $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$ na trojuholník s vrcholmi (a,b), (c,d) a (e,f).

b) skúste nájsť podmienku (rovnicu), ktorú musia spĺňať čísla a,b,c,d,e,f aby bola daná afinná transformácia izomorfizmom.

c) ak nejde všeobecný prípad, skúste trojice $(1,0)$, $(0,3)$, $(-1,0)$ a $(1,1)$, $(3,3)$, $(1,2)$.

5. Dokážte, že tri telesové uhlopriečky rovnobežnostena sa pretínajú v jednom bode. (V akom?)

6. Ukážte, že ťažisko štvorstena delí jeho ťažnice v pomere $3:1$, t.j. leží v ich štvrtine.

Dodatočné úlohy

7. Nájdite prienik nasledujúcich afinných priestorov:

$$V_1 = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1) + s(1,-1,0) + t(1,1,-2) \qquad \text{a} \qquad V_2 = (2,0,1) + p(1,0-1) + r(0,1,2).$$

8. V afinnom priestore $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ majme body A, B a C.

a) Nájdite barymetrické súradnice (l_A, l_B, l_C) tak, aby kombinácia $l_A A + l_B B + l_C C$ zodpovedala ťažisku trojuholníka ABC.

b) Nájdite barymetrické súradnice (m_A, m_B, m_C) tak, aby kombinácia $m_A A + m_B B + m_C C$ zodpovedala stredu vpísanej kružnice trojuholníka ABC.

c) Nájdite barymetrické súradnice (n_A, n_B, n_C) tak, aby kombinácia $n_A A + n_B B + n_C C$ zodpovedala stredu opísanej kružnice trojuholníka ABC.

Pozn. súradnice m_i, n_i môžu výjsť "škaredo", t.j. budú závisieť od konkrétnej voľby bodov A, B, C – budú to nejaké skalárne funkcie závislé od polohy trojice A, B, C.

9. V $\mathbb{R}^3$ uvažujme jednotkovú sféru S^2 danú rovnicou $x^2+y^2+z^2=1$. Cez bod $B=(x_0,y_0,z_0)\in S^2$ prechádza dotyková rovina T_B k sfére S^2. Nájdite vektorovú zložku roviny T_B ako afinného podpriestoru priestoru $\mathbb{R}^3$.

Cez bod B prechádza aj tzv.*normálová priamka* N_B k sfére S^2, kolmá na dotykovú rovinu T_B. Nájdite jej vektorovú zložku.