Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 5

Cvičenia v týždni 9. marca 2009 - Zmena bázy, orientácia

---

1. Aká zmena bázy zodpovedá elementárnym maticiam z Gaussovej eliminácie?

Presvedčte sa prečo sú nové množiny vektorov naozaj bázou. Ktorá elementárna operácia zachováva orientáciu a ktorá mení?

2. Aká matica zodpovedá zmene bázy z $v_1, v_2, \dots, v_n$ na $v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots v_{\sigma(n)}$, kde σ je permutácia n-prvkovej množiny?

Prečo by takéto matice mali tvoriť podgrupu $GL(n, \mathbb{R})$? Ktoré permutácie zachovávajú orientáciu bázy? Tvoria tiež grupu? Skúmajte pre $n = 3, 4$ a popíšte $A_n \subset S_n$.

3. Zachováva Gramm-Schmidtova ortogonalizácia, ak ju aplikujeme na nejakú bázu, orientáciu?

4. Ako sa zmení matica zobrazenia $\phi : U \to V$ ak zmeníme bázy v oboch vektorových priestoroch?

5. Lineárne zobrazenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je v štandardnej báze e_1, e_2, e_3 popísané maticou

$$\begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nájdite maticu toho istého zobrazenia v báze $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

Dodatočné úlohy

6. Ukážte, že matice lineárneho zobrazenia pre dve rôzne bázy sú rovnaké práve vtedy, keď matica prechodu komutuje s maticou lineárneho zobrazenia.

7. Nájdite maticu prechodu medzi bázou $1, x, x^2, \dots, x^n$ a bázou $1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n$ vo vektorovom priestore polynómov stupňa nanajvýš n.

8. Komplexný vektorový priestor $\mathbb{C}^n$ môžeme chápať ako $\mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$ – t.j. ako $2n$-rozmerný reálny vektorový priestor. V štandardnej báze $e_1, e_2, \dots, e_n, ie_1, ei_2, \dots ie_n$ zodpovedá násobeniu komplexnou jednotkou i (reálne lineárne zobrazenie, overte) matica

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Pre ktoré iné bázy dá násobenie i rovnakú maticu J?

Pozn. V závislosti od toho, či vektory chápeme ako riadky resp. stĺpce máme dva maticové predpisy: $x \mapsto xJ$ pre riadky a $x^T \mapsto J^T x^T$ pre stĺpce. Preto sa niekedy matica J objavuje v literatúre transponovaná.