Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 8

Cvičenia v týždni 30. marca 2009 - Vlastné hodnoty a vektory

---

1. Ak vlastné hodnoty 3×3 matice A sú $1, 1$ a 2, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú zaručene pravdivé? Zdôvodnite v pravdivom prípade, nájdite protipríklad v nepravdivom.
a) A je invertibilná,
b) A je diagonalizovateľná,
c) A nie je diagonalizovateľná.

2. *(Pravda/Nepravda)* Predpokladajme, že jedinými vlastnými vektormi matice A sú násobky vektora $x = (1, 0, 0)$.
a) A nie je invertibilná,
b) A má viacnásobnú vlastnú hodnotu,
c) A nie je diagonalizovateľná.

3. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre permutačné matice

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dodatočné úlohy
4. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Overte, že súčet $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ sa rovná stope matice a súčin $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ sa rovná determinantu.

5. Nájdite tretí riadok matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

tak, aby jej charkateristický polynóm $\det(\lambda I - A)$ bol $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 6$.

6. Ukážte, že ak má horná trojuholníková 3×3 matica na diagolále zložky 1, 2 a 7, potom je diagonalizovateľná. Ako bude vyzerať diagonálna matica D?

7. Predpokladajme, že λ je vlastná hodnota matice A a x je príslušný vlastný vektor, t.j. $Ax = \lambda x$.
(a) Ukážte, že x je tiež vlastným vektorom matice $B = A - cI$, kde $c \in \mathbb{R}$. Nájdite vlastnú hodnotu prislúchajúcu vektoru x.
(b) Predpokladajme, že $\lambda \neq 0$. Ukážte, že potom je x vlastným vektorom matice A^{-1} a nájdite vlastnú hodnotu.

8. (a) Skonštruujte 2×2 matice A a B také, že vlastné hodnoty súčinu AB nebudú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B, podobne vlastné hodnoty $A + B$ nebudú súčtom jednotlivých vlastných hodnôt.
(b) Overte, že napriek tomu sa súčet vlastných hodnôt matice $A + B$ rovná súčtu všetkých vlastných hodnôt matíc A a B, podobne pre súčiny. Prečo je to tak?