Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 9

Cvičenia v týždni 6. apríla 2009 - Vlastné hodnoty a vektory

---

**1.** *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite, resp. nájdite protipríklad:
a) Ak $A$ je symetrická matica, potom $A + iI$ je invertibilná.
b) Ak $Q$ je ortogonálna matica, potom $Q + \frac{1}{2}I$ je invertibilná.
c) Ak $A$ má reálne zložky, potom $A + iI$ je invertibilná.
d) Existuje matica $A$ taká, že matice typu $A + cI$ sú invertibilné pre všetky komplexné čísla $c$.
e) Existuje reálna matica $A$ taká, že $A + rI$ bude invertibilná pre všetky reálne $r$.

**2.** Napíšte maticu $\bar{A}^T$ a spočítajte $C = \bar{A}^T A$ ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aký je vzťah medzi $C$ a $\bar{C}^T$? Platí niečo podobné pre každú maticu $C$, ktorá sa dá zapísať ako $\bar{A}^T A$?

**3.** a) Ako súvisí determinant matice $\bar{A}^T$ s determinantom matice $A$?
b) Dokážte, že determinant ľubovoľnej hermitovskej matice ($\bar{A}^T = A$) je reálne číslo.

**4.** Nájdite tretí riadok matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

tak, aby jej charkateristický polynóm $\det(\lambda I - A)$ bol $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 6$.

**5.** Predpokladajme, že $\lambda$ je vlastná hodnota matice $A$ a $x$ je príslušný vlastný vektor, t.j. $Ax = \lambda x$.
(a) Ukážte, že $x$ je tiež vlastným vektorom matice $B = A - cI$, kde $c \in \mathbb{R}$. Nájdite vlastnú hodnotu prislúchajúcu vektoru $x$.
(b) Predpokladajme, že $\lambda \neq 0$. Ukážte, že potom je $x$ vlastným vektorom matice $A^{-1}$ a nájdite vlastnú hodnotu.