

1. Ukážte, že $x - y$ je kolmý na $x + y$ práve vtedy, keď $\|x\| = \|y\|$.
2. Aký násobok vektora $a = (1, 1, 1)$ je najbližšie k bodu $b = (2, 4, 4)$? Nájdite tiež najbližší bod k bodu a na priamke prechádzajúcej cez b .
3. Predpokladajme, že P je matica zobrazenia kolmej projekcie na podpriestor S a Q je matica projekcie na jeho ortogonálny doplnok $S^\perp$. Čo budú $P + Q$ a PQ ? Ukážte, že matica $P - Q$ je sama sebe inverznou.
Využite vzťahy, ktoré pre matice projekčných zobrazení platia: P je symetrická, $P^2 = P$ a pod. Pre výpočet $P + Q$ a PQ sa zamyslite nad tým, čo zobrazenia dané týmito maticami spravia s ľubovoľným vektorom.

4. Nech U a V sú podpriestory euklidovského priestoru X . Ukážte, že platí rovnosť

$$U^\perp \cap V^\perp = (U + V)^\perp.$$

Platí aj rovnosť

$$(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp?$$

5. Pravda/Nepravda. Zdôvodnite.

- a) ak V je ortogonálne k W , potom aj $V^\perp$ je ortogonálne k $W^\perp$,
- b) ak V je ortogonálne k W a W je ortogonálne k Z , potom aj V je ortogonálne k Z .

Dodatočné úlohy – ľahšie

6. Majme vektory $v_1 = (1, 1, 0, 1)$ a $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, ktoré generujú priestor S .
a) Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $(1, 0, -1, 0)$ do S .
b) Nájdite dva ortogonálne vektory, ktorých projekcia na S je 0. (t.j. bude to ortogonálna báza $S^\perp$)
7. Ukážte, že pre vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
8. Použite Gram-Schmidtov proces na vektory $x_1 = (1, -1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, -1, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1, -1)$.

Dodatočné úlohy – ťažšie

9. Ukážte, že ak vektory $q_1, q_2, \dots, q_n$ tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$, potom $q_1^T q_1 + \dots + q_n^T q_n = I_n$.
Pozn. členy $v_i^T v_i$ tu predstavujú $n \times n$ matice. Sú niečím význačné?
10. Vo vektorovom priestore $P_5(t)$ polynómov stupňa 5, t.j. $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$, majme podmnožinu S polynómov spĺňajúcich $\int_0^1 p(t) dt = 0$. Overte, že S je podpriestor a nájdite jeho bázu.
Pozn. Použite vzorec $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$.
11. Ukážte, že pre vektorový priestor $P_n(t)$ polynómov stupňa n , t.j. $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, spĺňa bilinéarne zobrazenie $\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$ podmienky skalárneho súčinu.
Skúste pomocou tohto skalárneho súčinu ortogonalizovať bázu $x_0 = 1$, $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$, $x_4 = t^4$, atď.
Pozn. V prípade záujmu pozrite wikipedia/Legendre_Polynomials.
Pozn. To isté môžete spraviť aj pre iný skalárny súčin: $\langle p(t), q(t) \rangle' = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$.