

## Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 3

Cvičenia v týždni 1. marca 2010 - Afinné priestory a sústavy rovníc

---

1. Označme ako  $V_1$  množinu riešení rovnice  $u+v+w=2$  – je to nadrovina v  $\mathbb{R}^3$  a súčasne dvojrozmerný afinný podpriestor  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ . Podobne nech  $V_2$  označuje množinu riešení rovnice  $u+3v+3w=0$ .

Pre priestory  $V_1$  a  $V_2$  nájdite vyjadrenie v tvare (bod + vektorový priestor). Ukážte, že prienik  $V_1 \cap V_2$  zodpovedá presne priestoru  $W$  riešení sústavy rovníc:

$$u+v+w=2 \qquad u+3v+3w=0$$

2. Priamku prechádzajúcu cez koncové body vektorov  $u$  a  $v$  môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov  $P = \{tu + (1-t)v \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Ukážte, že každá lineárna transformácia zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov  $x$  a  $y$  sa zobrazí na stred úsečky z  $xA$  do  $yA$ .

3. Nájdite parametrické rovnice roviny, ktorá prechádza trojicami bodov:

- $(1, 3, 2), (4, 1, -1), (2, 0, 0)$ ,
- $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ ,
- $(2, -1, 3), (1, 1, 1), (3, 0, 4)$ .

4. Nájdite predpis afinnej transformácie priestoru  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , ktorá zobrazuje trojuholník s vrcholmi  $(0, 0), (1, 0)$  a  $(0, 1)$  na trojuholník s vrcholmi  $(a, b), (c, d)$  a  $(e, f)$ .

b) skúste nájsť podmienku (rovnice), ktorú musia spĺňať čísla  $a, b, c, d, e, f$  aby bola daná afinná transformácia izomorfizmom.

c) ak nejde všeobecný prípad, skúste trojice  $(1, 0), (0, 3), (-1, 0)$  a  $(1, 1), (3, 3), (1, 2)$ .

5. Dokážte, že tri telesové uhlopriečky rovnobežnostena sa pretínajú v jednom bode. (V akom?)

6. Ukážte, že ťažisko štvorstena delí jeho ťažnice v pomere 3 : 1, t.j. leží v ich štvrtine.

### Dodatočné úlohy

7. Nájdite prienik nasledujúcich afinných priestorov:

$$V_1 = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) + s(1, -1, 0) + t(1, 1, -2) \qquad \text{a} \qquad V_2 = (2, 0, 1) + p(1, 0 - 1) + r(0, 1, 2).$$

8. V afinnom priestore  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  majme body  $A, B$  a  $C$ .

a) Nájdite barymetrické súradnice  $(l_A, l_B, l_C)$  tak, aby kombinácia  $l_A A + l_B B + l_C C$  zodpovedala ťažisku trojuholníka  $ABC$ .

b) Nájdite barymetrické súradnice  $(m_A, m_B, m_C)$  tak, aby kombinácia  $m_A A + m_B B + m_C C$  zodpovedala stredom vpísanej kružnice trojuholníka  $ABC$ .

c) Nájdite barymetrické súradnice  $(n_A, n_B, n_C)$  tak, aby kombinácia  $n_A A + n_B B + n_C C$  zodpovedala stredom opísanej kružnice trojuholníka  $ABC$ .

*Pozn.* súradnice  $m_i, n_i$  môžu výjsť “škaredo“, t.j. budú závisieť od konkrétnej voľby bodov  $A, B, C$  – budú to nejaké skalárne funkcie závislé od polohy trojice  $A, B, C$ .

9. V  $\mathbb{R}^3$  uvažujme jednotkovú sféru  $S^2$  danú rovnicou  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Cez bod  $B = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$  prechádza dotyková rovina  $T_B$  k sfére  $S^2$ . Nájdite vektorovú zložku roviny  $T_B$  ako afinného podpriestoru priestoru  $\mathbb{R}^3$ .

Cez bod  $B$  prechádza aj tzv. *normálová priamka*  $N_B$  k sfére  $S^2$ , kolmá na dotykovú rovinu  $T_B$ . Nájdite jej vektorovú zložku.