

1. Aká zmena bázy zodpovedá elementárnym maticiam z Gaussovej eliminácie?

Presvedčte sa prečo sú nové množiny vektorov naozaj bázou. Ktorá elementárna operácia zachováva orientáciu a ktorá mení?

2. Lineárne zobrazenie  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je v štandardnej báze  $e_1, e_2, e_3$  popísané maticou

$$\begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nájdite maticu toho istého zobrazenia v báze  $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ .

3. Aká matica zodpovedá zmene bázy z  $v_1, v_2, \dots, v_n$  na  $v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}$ , kde  $\sigma$  je permutácia  $n$ -prvkovej množiny?

Prečo by takéto matice mali tvoriť podgrupu  $GL(n, \mathbb{R})$ ? Ktoré permutácie zachovávajú orientáciu bázy? Tvorí tiež grupu? Skúmajte pre  $n = 3, 4$  a popíšte  $A_n \subset S_n$ .

4. Zachováva Gramm-Schmidtova ortogonalizácia, ak ju aplikujeme na nejakú bázu, orientáciu?

5. Nájdite maticu prechodu medzi bázou  $1, x, x^2, \dots, x^n$  a bázou  $1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n$  vo vektorovom priestore polynómov stupňa najvyššie  $n$ .

### Dodatočné úlohy

6. Ako sa zmení matica zobrazenia  $\phi : U \rightarrow V$  ak zmeníme bázy v oboch vektorových priestoroch?

7. Ukážte, že matice lineárneho zobrazenia pre dve rôzne bázy sú rovnaké práve vtedy, keď matica prechodu komutuje s maticou lineárneho zobrazenia.

8. Komplexný vektorový priestor  $\mathbb{C}^n$  môžeme chápať ako  $\mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$  – t.j. ako  $2n$ -rozmerný reálny vektorový priestor. V štandardnej báze  $e_1, e_2, \dots, e_n, ie_1, ie_2, \dots, ie_n$  zodpovedá násobeniu komplexnou jednotkou  $i$  (reálne lineárne zobrazenie, overte) matica

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Pre ktoré iné bázy dá násobenie  $i$  rovnakú maticu  $J$ ?

*Pozn.* V závislosti od toho, či vektory chápeme ako riadky resp. stĺpce máme dva maticové predpisy:  $x \mapsto xJ$  pre riadky a  $x^T \mapsto J^T x^T$  pre stĺpce. Preto sa niekedy matica  $J$  objavuje v literatúre transponovaná.