Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 2

Cvičenia v týždni 22. februára 2011 - Skalárny súčin, ortogonalita

---

**1.** Ukážte, že $x - y$ je kolmý na $x + y$ práve vtedy, keď $\|x\| = \|y\|$.

**2.** Aký násobok vektora $a = (1, 1, 1)$ je najbližšie k bodu $b = (2, 4, 4)$? Nájdite tiež najbližší bod k bodu $a$ na priamke prechádzajúcej cez $b$.

**3.** Predpokladajme, že $P$ je matica zobrazenia kolmej projekcie na podpriestor $S$ a $Q$ je matica projekcie na jeho ortogonálny doplnok $S^\perp$. Čo budú $P + Q$ a $PQ$? Ukážte, že matica $P - Q$ je sama sebe inverznou.

Využite vzťahy, ktoré pre matice projekčných zobrazení platia: $P$ je symetrická, $P^2 = P$ a pod. Pre výpočet $P + Q$ a $PQ$ sa zamyslite nad tým, čo zobrazenia dané týmito maticami spravia s ľubovoľným vektorom.

**4.** Nech $U$ a $V$ sú podpriestory euklidovského priestoru $X$. Ukážte, že platí rovnosť

$$U^\perp \cap V^\perp = (U + V)^\perp.$$

Platí aj rovnosť

$$(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp?$$

**5.** Pravda/Nepravda. Zdôvodnite.
a) ak $V$ je ortogonálne k $W$, potom aj $V^\perp$ je ortogonálne k $W^\perp$,
b) ak $V$ je ortogonálne k $W$ a $W$ je ortogonálne k $Z$, potom aj $V$ je ortogonálne k $Z$.

**Dodatočné úlohy – ľahšie**

**6.** Majme vektory $v_1 = (1, 1, 0, 1)$ a $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, ktoré generujú priestor $S$.
a) Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $(1, 0, -1, 0)$ do $S$.
b) Nájdite dva ortogonálne vektory, ktorých projekcia na $S$ je 0. (t.j. bude to ortogonálna báza $S^\perp$)

**7.** Ukážte, že pre vektory $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ platí $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

**8.** Použite Gram-Schmidtov proces na vektory $x_1 = (1, -1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, -1, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1, -1)$.

**Dodatočné úlohy – ťažšie**

**9.** Ukážte, že ak vektory $q_1, q_2, \dots, q_n$ tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$, potom $q_1^T q_1 + \cdots + q_n^T q_n = I_n$.
*Pozn.* členy $v_i^T v_i$ tu predstavujú $n \times n$ matice. Sú niečim význačné?

**10.** Vo vektorovom priestore $P_5(t)$ polynómov stupňa 5, t.j. $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$, majme podmnožinu $S$ polynómov spĺňajúcich $\int_0^1 p(t)dt = 0$. Overte, že $S$ je podpriestor a nájdite jeho bázu.
*Pozn.* Použite vzorec $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$.

**11.** Ukážte, že pre vektorový priestor $P_n(t)$ polynómov stupňa $n$, t.j. $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, spĺňa bilineárne zobrazenie $\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$ podmienky skalárneho súčinu.

Skúste pomocou tohto skalárneho súčinu ortogonalizovať bázu $x_0 = 1$, $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$, $x_4 = t^4$, atď.

*Pozn.* V prípade záujmu pozrite wikipedia/Legendre_Polynomials.
*Pozn.* To isté môžte spraviť aj pre iný skalárny súčin: $\langle p(t), q(t) \rangle' = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$.