Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 10

Cvičenia 18. apríla 2012 - Vlastné hodnoty a vektory

---

1. Majme matice A a B. Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.

2. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D.$$

Ukážte, že ak A a C komutujú, potom sa determinant rovná $\det(AD - CB)$.

3. *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite, resp. nájdite protipríklad:
a) Ak A je symetrická matica, potom $A + iI$ je regulárna.
b) Ak Q je ortogonálna matica, potom $Q + \frac{1}{2}I$ je regulárna.
c) Ak A má reálne zložky, potom $A + iI$ je regulárna.
d) Existuje matica A taká, že matice typu $A + cI$ sú invertibilné pre všetky komplexné čísla c.
e) Existuje reálna matica A taká, že $A + rI$ bude invertibilná pre všetky reálne r.

4. a) Nájdite nenulovú maticu N, takú aby $N^3 = 0$.
b) Ukážte, že ak $Nx = \lambda x$, potom λ musí byť nula.
c) Dokážte, že N (ktorá sa nazýva *nilpotentná*) nemôže byť symetrická.

5. Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica J *nie je podobná* matici K:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{a} \quad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Pre ľubovľnú maticu M provnajte JM a MK. Ak sa rovnajú, ukážte, že M nie je invertibilná, a teda rovnosť $M^{-1}JM = K$ nemôže nastať.

Dodatočné úlohy

6. Nech A je nilpotentná matica (t.j. $A^k = 0$ pre nejaké k). Ukážte, že $\det(A + I) = 1$.

7. Predpokladajme, že matice A a B sa dajú diagonalizovať tou istou diagonalizačnou maticou S, teda máme $A = S^{-1}\Lambda_1 S$ a $B = S^{-1}\Lambda_2 S$. Ukážte, že potom matice A a B komutujú a tiež, že vlastné hodnoty súčinu AB sú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B. Ako je to s vlastnými vektormi?

8. Predpokladajme, že každá z matíc A a B má n rôznych vlastných hodnôt. Navyše predpokladajme, že matice A a B komutujú. Ukážte potom, že ak x je vlastný vektor matice A, potom je aj vlastným vektorom matice B. Výjdite z rovnosti $xAB = xBA$.

Pozn. Keďže toto platí pre každý vlastný vektor matice A, matice A a B majú rovnaké všetky vlastné vektory, a preto majú tú istú diagonalizačnú maticu S. Ukázali sme tak spolu s príkladom č. 10, že (diagonalizovateľné) matice komutujú práve vtedy, keď majú rovnaké vlastné vektory.