Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 3

Cvičenia 29. februára 2012 - Afinné priestory a sústavy rovníc

---

1. Označme ako V_1 množinu riešení rovnice $u+v+w=2$ – je to nadrovina v $\mathbb{R}^3$ a súčasne dvojrozmerný afinný podpriestor $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Podobne nech V_2 označuje množinu riešení rovnice $u+3v+3w=0$.

Pre priestory V_1 a V_2 nájdite vyjadrenie v tvare (bod + vektorový priestor). Ukážte, že prienik $V_1 \cap V_2$ zodpovedá presne priestoru W riešení sústavy rovníc:

$$u+v+w=2 \qquad\qquad u+3v+3w=0$$

2. Priamku prechádzajúcu cez body U a V (koncové body vektorov $u=\overrightarrow{0U}$ a $v=\overrightarrow{0V}$) môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov $\overrightarrow{0P}=\{tu+(1-t)v \,|\, t\in\mathbb{R}\}$. Ukážte, že každá lineárna tansformácia zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov x a y sa zobrazí na stred úsečky z xA do yA.

3. Nájdite parametrické rovnice roviny, ktorá prechádza trojicami bodov:
a) $(1,3,2)$, $(4,1,-1)$, $(2,0,0)$,
b) $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$,
c) $(2,-1,3)$, $(1,1,1)$, $(3,0,4)$.

4. Nájdite predpis afinnej transformácie priestoru $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, ktorá zobrazuje trojuholník s vrcholmi $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$ na trojuholník s vrcholmi (a,b), (c,d) a (e,f).

b) skúste nájsť podmienku (rovnicu), ktorú musia spĺňať čísla a,b,c,d,e,f aby bola daná afinná transformácia izomorfizmom.

c) ak nejde všeobecný prípad, skúste trojice $(1,0)$, $(0,3)$, $(-1,0)$ a $(1,1)$, $(3,3)$, $(1,2)$.

5. Dokážte, že tri telesové uhlopriečky rovnobežnostena sa pretínajú v jednom bode. (V akom?)

6. Ukážte, že ťažisko štvorstena delí jeho ťažnice v pomere $3:1$, t.j. leží v ich štvrtine.

Dodatočné úlohy

7. Nájdite prienik nasledujúcich afinných priestorov:

$$V_1=(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},1)+s(1,-1,0)+t(1,1,-2) \qquad \text{a} \qquad V_2=(2,0,1)+p(1,0-1)+r(0,1,2).$$

8. V afinnom priestore $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ majme body A, B a C.

a) Nájdite barycentrické súradnice (l_A,l_B,l_C) tak, aby kombinácia $l_AA+l_BB+l_CC$ zodpovedala ťažisku trojuholníka ABC.

b) Nájdite barycentrické súradnice (m_A,m_B,m_C) tak, aby kombinácia $m_AA+m_BB+m_CC$ zodpovedala stredu vpísanej kružnice trojuholníka ABC.

c) Nájdite barycentrické súradnice (n_A,n_B,n_C) tak, aby kombinácia $n_AA+n_BB+n_CC$ zodpovedala stredu opísanej kružnice trojuholníka ABC.

Pozn. súradnice m_i, n_i môžu výjsť "škaredo", t.j. budú závisieť od konkrétnej voľby bodov A,B,C – budú to nejaké skalárne funkcie závislé od polohy trojice A,B,C.

9. V $\mathbb{R}^3$ uvažujme jednotkovú sféru S^2 danú rovnicou $x^2+y^2+z^2=1$. Cez bod $B=(x_0,y_0,z_0)\in S^2$ prechádza dotyková rovina T_B k sfére S^2. Nájdite vektorovú zložku roviny T_B ako afinného podpriestoru priestoru $\mathbb{R}^3$.

Cez bod B prechádza aj tzv.*normálová priamka* N_B k sfére S^2, kolmá na dotykovú rovinu T_B. Nájdite jej vektorovú zložku.