

1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre permutačné matice

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Nájdite tretí riadok matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

tak, aby jej charakteristický polynóm  $\det(\lambda I - A)$  bol  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 6$ .

3. Ukážte, že ak má horná trojuholníková  $3 \times 3$  matica na diagonále zložky 1, 2 a 7, potom je podobná diagonálnej matici  $D$ . Ako bude vyzeráť  $D$ ?

4. (a) Ak  $A^2 = I$ , aké môže mať matice  $A$  vlastné hodnoty?  
 (b) Ak je takáto (reálna) matice typu  $2 \times 2$  a nerovná sa  $I$  alebo  $-I$ , nájdite jej stopu a determinant.  
 (c) Dopočítajte druhý riadok matice, ak je jej prvý riadok  $(3, -1)$ .

#### Dodatočné úlohy

5. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

Overte, že súčet  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$  sa rovná stope matice a súčin  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$  sa rovná determinantu.

6. Predpokladajme, že  $\lambda$  je vlastná hodnota matice  $A$  a  $x$  je príslušný vlastný vektor, t.j.  $xA = \lambda x$ .  
 (a) Ukážte, že  $x$  je tiež vlastným vektorom matice  $B = A - cI$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ . Nájdite vlastnú hodnotu príslušajúcu vektoru  $x$ .  
 (b) Predpokladajme, že  $\lambda \neq 0$ . Ukážte, že potom je  $x$  vlastným vektorom matice  $A^{-1}$  a nájdite vlastnú hodnotu.

7. (a) Skonstruujte  $2 \times 2$  matice  $A$  a  $B$  také, že vlastné hodnoty súčinu  $AB$  nebudú súčinom vlastných hodnôt matíc  $A$  a  $B$ , podobne vlastné hodnoty  $A + B$  nebudú súčtom jednotlivých vlastných hodnôt.  
 (b) Overte, že napriek tomu sa súčet vlastných hodnôt matice  $A + B$  rovná súčtu všetkých vlastných hodnôt matíc  $A$  a  $B$ , podobne pre súčiny. Prečo je to tak?

8. Ak vlastné hodnoty  $3 \times 3$  matice  $A$  sú 1, 1 a 2, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú zaručene pravdivé? Zdôvodnite v pravdivom prípade, nájdite protipríklad v nepravdivom.

- a)  $A$  je invertibilná,  
 b)  $A$  je diagonalizovateľná,  
 c)  $A$  nie je diagonalizovateľná.

9. (*Pravda/Nepravda*) Predpokladajme, že jedinými vlastnými vektormi matice  $A$  sú násobky vektora  $x = (1, 0, 0)$ .

- a)  $A$  nie je invertibilná,  
 b)  $A$  má viacnásobnú vlastnú hodnotu,  
 c)  $A$  nie je diagonalizovateľná.