Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 9

Cvičenia 11. apríla 2012 - Vlastné hodnoty a vektory

---

1. Vysvetlite prečo matica A nemôže byť nikdy podobná matici $A + I$.

2. Nájdite A^{100} ak $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

3. Derivácia všeobecného polynómu $a + bx + cx^2 + dx^3$ stupňa 3 má tvar $b + 2cx + 3dx^2$. Pripomeňme si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.
a) Nájdite maticu D zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.

$$\left[\begin{smallmatrix} a & b & c & d \end{smallmatrix}\right] D = \left[\begin{smallmatrix} b & 2c & 3d & 0 \end{smallmatrix}\right].$$

b) Vypočítajte D^4 a vysvetlite výsledok v reči derivácií.
c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice D?

4. Aké sú vlastné hodnoty matice A spĺňajúcej $A^2 = -I$? Ak A je taká reálna $n \times n$ matica, ukážte, že n musí byť párne. Uveďte príklad.

Dodatočné úlohy

5. Napíšte maticu $\bar{A}^T$ a spočítajte $C = \bar{A}^T A$ ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aký je vzťah medzi C a $\bar{C}^T$? Platí niečo podobné pre každú maticu C, ktorá sa dá zapísať ako $\bar{A}^T A$?

6. a) Ako súvisí determinant matice $\bar{A}^T$ s determinantom matice A?
b) Dokážte, že determinant ľubovoľnej hermitovskej matice ($\bar{A}^T = A$) je reálne číslo.
c) Ako súvisia vlastné hodnoty matice $\bar{A}^T$ s vlastnými hodnotami matice A?

7. Ak je matica K anti-symetrická, ukážte, že matica $Q = (I - K)(I + K)^{-1}$ bude ortogonálna. Nájdite Q pre $K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Prečo $(I + K)^{-1}$ vždy existuje?