Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 13

Duálne priestory a ďalšie úlohy na Jordanov tvar

---

1. Nech V je štvorrozmerný reálny vektorový priestor s bázou $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ a nech $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ je k nej duálna báza vo V^*. Vyjadrite pomocou ξ_i duálne bázy k nasledujúcim bázam:
a) $\{x_2, x_1, x_4, x_3\}$,
b) $\{x_1, 2x_2, \frac{1}{2}x_3, x_4\}$,
c) $\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4\}$,
d) $\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2 + x_1, x_4 - x_3 + x_2 - x_1\}$.

2. Nech $\mathcal{P}_n$ je priestor reálnych polynómov v premennej x stupňa nanajvýš n. Pre $t \in \mathbb{R}$ definujme $\epsilon_t \in \mathcal{P}_n^*$ ako $\epsilon_t(p) = p(t)$. Ukážte, že $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ tvoria bázu $\mathcal{P}_n^*$ a nájdite k nej duálnu bázu $\mathcal{P}_n$.

3. a) Ukážte, že ak x, y sú dva rôzne vektory v konečnorozmernom vektorovom priestore V, potom existuje lineárny funkcionál $\theta \in \mathbb{V}^*$, pre ktorý $\theta(x) \neq \theta(y)$.
b) Ukážte, že pre konečno rozmerný priestor V platí nasledujúce tvrdenie: podmnožina $F \subset V^*$ generuje celý duálny priestor V^* práve vtedy, keď $\{v \in V | f(v) = 0, \forall f \in F\} = \{0\}$ (t.j. vektor, ktorý je nulovaný všetkými prvkami F je len nulový vektor 0.

4. Nech A je matica typu $n \times m$ a B je matica typu $m \times n$ nad nejakým poľom F. Označme stopu $\operatorname{tr} AB$ ako $\tau_A(B)$.
a) Ukážte, že pre každú fixnú maticu A je τ_A lineárne zobrazenie z $M_{m,n}(F)$ do F.
b) Teraz uvažujme zobrazenie $A \mapsto \tau_A$. Ukážte, že sa jedná o lineárny izomorfizmus $M_{n,m}(F) \to M_{m,n}(F)^*$.

5. Opíšte slovne (t.j. akú transformáciu reprezentujú) všetky matice, ktoré sú podobné matici $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ a nájdite zopár príkladov.

6. Vypíšte všetky možnosti pre Jordanov tvar 5×5 matice, ktorá má nulu ako päťnásobnú vlastnú hodnotu. (Zvykom býva začať väčšími blokmi v ľavom hornom rohu a postupne prejsť k najmenším idúc dole po diagonále matice J.)
Pre všetky možnosti nájdite charakteristický a minimálny polynóm, ako aj počty lineárne nezávislých vlastných vektorov.

7. Ak má 3×3 matica A vlastné hodnoty λ_1, λ_2 a λ_3, čo budú vlastné hodnoty matice $(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)$? Čo to bude za matica?

8. a) Použitím Cayley–Hamiltonovej vety nájdite vzorec pre A^{-1} obsahujúci mocniny matice A, $\det A$ a koeficienty jej charakteristického polynómu.
b) Overte správnosť tohto vzorca pre 2×2 matice priamym výpočtom.

9. Ukážte,že ak sú matice A a B podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$, potom sú ich minimálne polynómy $m_A(x)$ a $m_B(x)$ rovnaké.

10. Ukážte, že A^T je vždy podobná matici A. Vieme, že vlastné hodnoty majú rovnaké, problém by mohol byť v štruktúre vlastných vektorov.
a) Pre A skladajúcu sa z jedného bloku J_i nájdite maticu M_i takú aby $M_i^{-1} J_i M_i = J_i^T$.
b) Pre A v Jordanovom tvare poskladajte maticu M_0 z menších blokov tak, aby $M_0^{-1} J M_0 = J^T$.
c) Pre všeobecnú maticu $A = MJM^{-1}$ ukážte, že A^T je podobná J^T a tým pádom aj J a A.

11. Nech $n \times n$ matica A reprezentuje lineárne zobrazenie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ukážte, že vlastné podpriestory V_λ, zložené z príslušných zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, sú invariantné vzhľadom na lineárnu transformáciu T, t.j. $T(V_\lambda) = V_\lambda$, kde $V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x(A - \lambda I)^k = 0,\, k \in \mathbb{N}\}$.

12. Ukážte, že duálny priestor k priestoru všetých reálnych polynómov $\mathcal{P}$ je izomorfný s priestorom všetkých nekonečných postupností reálnych čísel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ prostredníctvom zobrazenia posielajúceho lineárnu formu $\xi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ na postupnosť $\{\xi(1), \xi(t), \xi(t^2), \dots\}$.

V zmysle tejto identifikácie popíšte efekt duálnych zobrazení na postupnosť $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ pre nasledujúce lineárne zobrazenia $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$:

a) zobrazenie derivácie D dané ako $D(p)(t) = p'(t)$,

b) zobrazenie S dané ako $S(p)(t) = p(t^2)$,

c) zložené zobrazenie DS,

d) zložené zobrazenie SD,

e) overte, že $(DS)^* = S^*D^*$ a $(SD)^* = D^*S^*$.