Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 2

Cvičenia 20. februára 2013 - Skalárny súčin, ortogonalita

---

1. Ukážte, že $x - y$ je kolmý na $x + y$ práve vtedy, keď $\|x\| = \|y\|$.

2. (Zadanie v afinnej reči) V priestore $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ uvažujme priamku l prechádzajúcu cez počiatok, bod $O = (0, 0, 0)$, ktorej smerový vektor je $a = (1, 1, 1)$. Ktorý bod priamky l je najbližšie k bodu $B = (2, 4, 4)$? Nájdite tiež najbližší bod na priamke prechádzajúcej cez O a B k bodu $A = (1, 1, 1)$.

(Zadanie v reči vektorových priestorov) Nájdite kolmú projekciu $p_a(b)$ vektora $b = (2, 4, 4)$ do priestoru $[a]$, t.j. lineárneho obalu vektora a pre $a = (1, 1, 1)$. Nájdite tiež projekciu $p_b(a)$ vektora a do priestoru $[b]$.

3. Predpokladajme, že P je matica zobrazenia kolmej projekcie na podpriestor S a Q je matica projekcie na jeho ortogonálny doplnok $S^\perp$. Čo budú $P + Q$ a PQ? Ukážte, že matica $P - Q$ je sama sebe inverznou.

Využite vzťahy, ktoré pre matice projekčných zobrazení platia: P je symetrická, $P^2 = P$ a pod. Pre výpočet $P + Q$ a PQ sa zamyslite nad tým, čo zobrazenia dané týmito maticami spravia s ľubovoľným vektorom.

4. Nech U a V sú podpriestory euklidovského priestoru X. Ukážte, že platí rovnosť

$$U^\perp \cap V^\perp = (U + V)^\perp.$$

Platí aj rovnosť

$$(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp?$$

5. Pravda/Nepravda. Zdôvodnite.
a) ak V je ortogonálne k W, potom aj $V^\perp$ je ortogonálne k $W^\perp$,
b) ak V je ortogonálne k W a W je ortogonálne k Z, potom aj V je ortogonálne k Z.

Dodatočné úlohy – ľahšie

6. Majme vektory $v_1 = (1, 1, 0, 1)$ a $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, ktoré generujú priestor S.
a) Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $(1, 0, -1, 0)$ do S.
b) Nájdite dva ortogonálne vektory, ktorých projekcia na S je 0. (t.j. bude to ortogonálna báza $S^\perp$)

7. Ukážte, že pre vektory x, $y \in \mathbb{R}^n$ platí $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

8. Použite Gram-Schmidtov proces na vektory $x_1 = (1, -1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, -1, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1, -1)$.

Dodatočné úlohy – ťažšie

9. Ukážte, že ak vektory $q_1, q_2, \ldots, q_n$ tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$, potom $q_1^T q_1 + \cdots + q_n^T q_n = I_n$.
Pozn. členy $v_i^T v_i$ tu predstavujú $n \times n$ matice. Sú niečim význačné?

10. Vo vektorovom priestore $P_5(t)$ polynómov stupňa 5, t.j. $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$, majme podmnožinu S polynómov spĺňajúcich $\int_0^1 p(t)dt = 0$. Overte, že S je podpriestor a nájdite jeho bázu.

Pozn. Použite vzorec $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$.

11. Ukážte, že pre vektorový priestor $P_n(t)$ polynómov stupňa n, t.j. $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, spĺňa bilineárne zobrazenie $\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$ podmienky skalárneho súčinu.

Skúste pomocou tohto skalárneho súčinu ortogonalizovať bázu $x_0 = 1$, $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$, $x_4 = t^4$, atď.

Pozn. V prípade záujmu pozrite wikipedia/Legendre_Polynomials.

Pozn. To isté môžte spraviť aj pre iný skalárny súčin: $\langle p(t), q(t) \rangle' = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$.