Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 5

Cvičenia 13. marca 2013 - Afinné priestory, zmena bázy (súradnicovej sústavy), orientácia

---

1. Ukážte a zdôvodnite prečo analytické vyjadrenie nadroviny prechádzajúcej cez body $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ a $D = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ sa bude dať napísať ako

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Ako by sme mali postupovať, keby sme chceli nájsť analytické vyjadrenie roviny $\overline{ABC}$ pomocou determinantov?

2. Lineárne zobrazenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je v štandardnej báze e_1, e_2, e_3 popísané maticou

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 8 \\ -11 & -15 & -7 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nájdite maticu toho istého zobrazenia v báze $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

3. Aká matica zodpovedá zmene bázy z $v_1, v_2, \dots, v_n$ na $v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots v_{\sigma(n)}$, kde σ je permutácia n-prvkovej množiny?

Prečo by takéto matice mali tvoriť podgrupu $GL(n, \mathbb{R})$? Ktoré permutácie zachovávajú orientáciu bázy? Tvoria tiež grupu? Skúmajte pre $n = 3, 4$ a popíšte $A_n \subset S_n$.

4. Aká zmena bázy zodpovedá elementárnym maticiam z Gaussovej eliminácie?

Presvedčte sa prečo sú nové množiny vektorov naozaj bázou. Ktorá elementárna operácia zachováva orientáciu a ktorá mení?

5. Zachováva Gramm-Schmidtova ortogonalizácia, ak ju aplikujeme na nejakú bázu, orientáciu?

6. Nájdite maticu prechodu medzi bázou $1, x, x^2, \dots, x^n$ a bázou $1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n$ vo vektorovom priestore polynómov stupňa nanajvýš n.

Dodatočné úlohy

7. Ako sa zmení matica zobrazenia $\phi : U \to V$ ak zmeníme bázy v oboch vektorových priestoroch?

8. Ukážte, že matice lineárneho zobrazenia pre dve rôzne bázy sú rovnaké práve vtedy, keď matica prechodu komutuje s maticou lineárneho zobrazenia.

9. Komplexný vektorový priestor $\mathbb{C}^n$ môžeme chápať ako $\mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$ – t.j. ako $2n$-rozmerný reálny vektorový priestor. V štandardnej báze $e_1, e_2, \dots, e_n, ie_1, ei_2, \dots ie_n$ zodpovedá násobeniu komplexnou jednotkou i (reálne lineárne zobrazenie, overte) matica

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Pre ktoré iné bázy dá násobenie i rovnakú maticu J?

Pozn. V závislosti od toho, či vektory chápeme ako riadky resp. stĺpce máme dva maticové predpisy: $x \mapsto xJ$ pre riadky a $x^T \mapsto J^T x^T$ pre stĺpce. Preto sa niekedy matica J objavuje v literatúre transponovaná.