

1. Vysvetlite prečo matica  $A$  nemôže byť nikdy podobná matici  $A + I$ .
2. Nájdite  $A^{100}$  ak  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .
3. Derivácia všeobecného polynómu  $a + bx + cx^2 + dx^3$  stupňa 3 má tvar  $b + 2cx + 3dx^2$ . Pripomeňme si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.
  - a) Nájdite maticu  $D$  zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.
$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b & 2c & 3d & 0 \end{bmatrix}.$$
  - b) Vypočítajte  $D^4$  a vysvetlite výsledok v reči derivácií.
  - c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice  $D$ ?
4. Aké sú vlastné hodnoty matice  $A$  spĺňajúcej  $A^2 = -I$ ? Ak  $A$  je taká reálna  $n \times n$  matica, ukážte, že  $n$  musí byť párne. Uveďte príklad.

#### Dodatočné úlohy

5. Napíšte maticu  $\bar{A}^T$  a spočítajte  $C = \bar{A}^T A$  ak
$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
 Aký je vzťah medzi  $C$  a  $\bar{C}^T$ ? Platí niečo podobné pre každú maticu  $C$ , ktorá sa dá zapísať ako  $\bar{A}^T A$ ?
  6. a) Ako súvisí determinant matice  $\bar{A}^T$  s determinantom matice  $A$ ?
  - b) Dokážte, že determinant ľubovoľnej hermitovskej matice ( $\bar{A}^T = A$ ) je reálne číslo.
  - c) Ako súvisia vlastné hodnoty matice  $\bar{A}^T$  s vlastnými hodnotami matice  $A$ ?
7. Ak je matica  $K$  anti-symetrická, ukážte, že matica  $Q = (I - K)(I + K)^{-1}$  bude ortogonálna. Nájdite  $Q$  pre  $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ . Prečo  $(I + K)^{-1}$  vždy existuje?