

1. Majme matice  $A$  a  $B$ . Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že  $AB$  a  $BA$  majú rovnaké vlastné hodnoty.

2. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D.$$

Ukážte, že ak  $A$  a  $C$  komutujú, potom sa determinant rovná  $\det(AD - CB)$ .

3. *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite, resp. nájdite protipríklad:

- Ak  $A$  je symetrická matica, potom  $A + iI$  je regulárna.
- Ak  $Q$  je ortogonálna matica, potom  $Q + \frac{1}{2}I$  je regulárna.
- Ak  $A$  má reálne zložky, potom  $A + iI$  je regulárna.
- Existuje matica  $A$  taká, že matice typu  $A + cI$  sú invertibilné pre všetky komplexné čísla  $c$ .
- Existuje reálna matica  $A$  taká, že  $A + rI$  bude invertibilná pre všetky reálne  $r$ .

4. a) Nájdite nenulovú maticu  $N$ , takú aby  $N^3 = 0$ .

b) Ukážte, že ak  $Nx = \lambda x$ , potom  $\lambda$  musí byť nula.

c) Dokážte, že  $N$  (ktorá sa nazýva *nilpotentná*) nemôže byť symetrická.

5. Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica  $J$  *nie je podobná* matici  $K$ :

$$J = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{a} \quad K = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Pre ľubovľnú maticu  $M$  provnajte  $JM$  a  $MK$ . Ak sa rovnajú, ukážte, že  $M$  nie je invertibilná, a teda rovnosť  $M^{-1}JM = K$  nemôže nastať.

### Dodatočné úlohy

6. Nech  $A$  je nilpotentná matica (t.j.  $A^k = 0$  pre nejaké  $k$ ). Ukážte, že  $\det(A + I) = 1$ .

7. Predpokladajme, že matice  $A$  a  $B$  sa dajú diagonalizovať tou istou diagonalizačnou maticou  $S$ , teda máme  $A = S^{-1}\Lambda_1 S$  a  $B = S^{-1}\Lambda_2 S$ . Ukážte, že potom matice  $A$  a  $B$  komutujú a tiež, že vlastné hodnoty súčinu  $AB$  sú súčinom vlastných hodnôt matíc  $A$  a  $B$ . Ako je to s vlastnými vektormi?

8. Predpokladajme, že každá z matíc  $A$  a  $B$  má  $n$  rôznych vlastných hodnôt. Navyše predpokladajme, že matice  $A$  a  $B$  komutujú. Ukážte potom, že ak  $x$  je vlastný vektor matice  $A$ , potom je aj vlastným vektorom matice  $B$ . Výjdite z rovnosti  $xAB = xBA$ .

*Pozn.* Keďže toto platí pre každý vlastný vektor matice  $A$ , matice  $A$  a  $B$  majú rovnaké všetky vlastné vektory, a preto majú tú istú diagonalizačnú maticu  $S$ . Ukázali sme tak spolu s príkladom č. 10, že (diagonalizovateľné) matice komutujú práve vtedy, keď majú rovnaké vlastné vektory.