

1. Ak  $A$  je záporne definitná matica, aké sú jej vlastné hodnoty, subdeterminanty, diagonálne prvky?
2. V trojrozmernom priestore rovnica  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$  reprezentuje elipsoid, pokiaľ sú všetky  $\lambda_i$  kladné. Opíšte všetky možné plochy, ktoré dostaneme v semidefinitnom alebo indefinitnom prípade.
3. Nájdite kde sa nadobúda maximum a minimum výrazu  $xAx^T$  pre jednotkové vektory.

#### Dodatočné úlohy

4. Ak  $A = RR^T$  dokážte zovšeobecnenú Cauchy–Schwarzovu nerovnosť  $|xAy^T|^2 \leq (x^T Ax)(y^T Ay)$ . Kedy nastáva rovnosť?

5. Rozhodnite, či nasledujúce množiny matíc tvoria grupy vzhľadom na násobenie: ortogonálne matice  $Q$ , kladne definitné matice  $A$ , matice s kladnými vlastnými hodnotami, matice  $D$  s determinantom 1, regulárne matice, ktoré sa dajú napísať ako polynóm z matice  $A$ , t.j. matice tvaru  $p(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$ . Skúste nájsť čo najväčšiu grupu obsahujúcu iba kladne definitné matice.

6. Skúste zistiť znamienka vlastných hodnôt matice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & n \end{bmatrix}.$$

(Návod: použite kritériá na definitnosť...)

7. Ukážte, že ak sú matice  $A$  a  $B$  kladne definitné, potom je takou aj matica  $A + B$ .
8. Ak je matica  $A$  symetrická a kladne definitná a  $C$  je regulárna, ukážte, že matica  $B = C^T A C$  je tiež symetrická a kladne definitná.
9. Ak je  $C$  regulárna matica, ukážte, že  $A$  a  $C^T A C$  majú rovnakú hodnotu. Teda nula ako vlastná hodnota má pre obe matice rovnakú násobnosť.

10. Experimentovaním zistíte signatúru  $2n \times 2n$  matice

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

kde  $B$  je regulárna  $n \times n$  matica.

11. Nech  $A$  je symetrická a kladne definitná matica. Ukážte, že jej maximálne zložky sa musia nachádzať na diagonále.

12. Ak  $A$  je symetrická a kladne definitná  $n \times n$  matica, tak sa dá zapísať ako  $A = RR^T$ . Ukážte, že potom  $\det A \leq a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ .

Táto nerovnosť sa tiež zvykne nazývať Hadamardova, lebo využíva porovnanie determinantu matice  $R$  a súčinu dĺžok riadkov (stĺpcov)  $R$ .