

1. Nech  $V$  je štvorrozmerný reálny vektorový priestor s bázou  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  a nech  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$  je k nej duálna báza vo  $V^*$ . Vyjadrite pomocou  $\xi_i$  duálne bázy k nasledujúcim bázam:

- $\{x_2, x_1, x_4, x_3\}$ ,
- $\{x_1, 2x_2, \frac{1}{2}x_3, x_4\}$ ,
- $\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4\}$ ,
- $\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2 + x_1, x_4 - x_3 + x_2 - x_1\}$ .

2. Nech  $\mathcal{P}_n$  je priestor reálnych polynómov v premennej  $x$  stupňa najvyšš  $n$ . Pre  $t \in \mathbb{R}$  definujeme  $\epsilon_t \in \mathcal{P}_n^*$  ako  $\epsilon_t(p) = p(t)$ . Ukážte, že  $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  tvoria bázu  $\mathcal{P}_n^*$  a nájdite k nej duálnu bázu  $\mathcal{P}_n$ .

3. a) Ukážte, že ak  $x, y$  sú dva rôzne vektory v konečnorozmernom vektorovom priestore  $V$ , potom existuje lineárny funkcionál  $\theta \in V^*$ , pre ktorý  $\theta(x) \neq \theta(y)$ .

b) Ukážte, že pre konečno rozmerný priestor  $V$  platí nasledujúce tvrdenie: podmnožina  $F \subset V^*$  generuje celý duálny priestor  $V^*$  práve vtedy, keď  $\{v \in V \mid f(v) = 0, \forall f \in F\} = \{0\}$  (t.j. vektor, ktorý je nulovaný všetkými prvkami  $F$  je len nulový vektor  $0$ ).

4. Nech  $A$  je matica typu  $n \times m$  a  $B$  je matica typu  $m \times n$  nad nejakým poľom  $F$ . Označme stopu  $\text{tr } AB$  ako  $\tau_A(B)$ .

a) Ukážte, že pre každú fixnú maticu  $A$  je  $\tau_A$  lineárne zobrazenie z  $M_{m,n}(F)$  do  $F$ .

b) Teraz uvažujme zobrazenie  $A \mapsto \tau_A$ . Ukážte, že sa jedná o lineárny izomorfizmus  $M_{n,m}(F) \rightarrow M_{m,n}(F)^*$ .

5. Opíšte slovne (t.j. akú transformáciu reprezentujú) všetky matice, ktoré sú podobné matici  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  a nájdite zopár príkladov.

6. Vypíšte všetky možnosti pre Jordanov tvar  $5 \times 5$  matice, ktorá má nulu ako päťnásobnú vlastnú hodnotu. (Zvykom býva začať väčšími blokmi v ľavom hornom rohu a postupne prejsť k najmenším idúc dole po diagonále matice  $J$ .)

Pre všetky možnosti nájdite charakteristický a minimálny polynóm, ako aj počty lineárne nezávislých vlastných vektorov.

7. Ak má  $3 \times 3$  matica  $A$  vlastné hodnoty  $\lambda_1, \lambda_2$  a  $\lambda_3$ , čo budú vlastné hodnoty matice  $(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)$ ? Čo to bude za matica?

8. a) Použitím Cayley–Hamiltonovej vety nájdite vzorec pre  $A^{-1}$  obsahujúci mocniny matice  $A$ ,  $\det A$  a koeficienty jej charakteristického polynómu.

b) Overte správnosť tohto vzorca pre  $2 \times 2$  matice priamym výpočtom.

9. Ukážte, že ak sú matice  $A$  a  $B$  podobné, t.j.  $B = M^{-1}AM$ , potom sú ich minimálne polynómy  $m_A(x)$  a  $m_B(x)$  rovnaké.

10. Ukážte, že  $A^T$  je vždy podobná matici  $A$ . Vieme, že vlastné hodnoty majú rovnaké, problém by mohol byť v štruktúre vlastných vektorov.

a) Pre  $A$  skladajúcu sa z jedného bloku  $J_i$  nájdite maticu  $M_i$  takú aby  $M_i^{-1}J_iM_i = J_i^T$ .

b) Pre  $A$  v Jordanovom tvare poskladajte maticu  $M_0$  z menších blokov tak, aby  $M_0^{-1}JM_0 = J^T$ .

c) Pre všeobecnú maticu  $A = MJM^{-1}$  ukážte, že  $A^T$  je podobná  $J^T$  a tým pádom aj  $J$  a  $A$ .

11. Nech  $n \times n$  matica  $A$  reprezentuje lineárne zobrazenie  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ukážte, že vlastné podpriestory  $V_\lambda$ , zložené z príslušných zovšeobecnených vlastných vektorov matice  $A$ , sú invariantné vzhľadom na lineárnu transformáciu  $T$ , t.j.  $T(V_\lambda) = V_\lambda$ , kde  $V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(A - \lambda I)^k = 0, k \in \mathbb{N}\}$ .

**12.** Ukážte, že duálny priestor k priestoru všetkých reálnych polynómov  $\mathcal{P}$  je izomorfný s priestorom všetkých nekonečných postupností reálnych čísel  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  prostredníctvom zobrazenia posielajúceho lineárnu formu  $\xi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  na postupnosť  $\{\xi(1), \xi(t), \xi(t^2), \dots\}$ .

V zmysle tejto identifikácie popíšte efekt duálnych zobrazení na postupnosť  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  pre nasledujúce lineárne zobrazenia  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ :

- a) zobrazenie derivácie  $D$  dané ako  $D(p)(t) = p'(t)$ ,
- b) zobrazenie  $S$  dané ako  $S(p)(t) = p(t^2)$ ,
- c) zložené zobrazenie  $DS$ ,
- d) zložené zobrazenie  $SD$ ,
- e) overte, že  $(DS)^* = S^*D^*$  a  $(SD)^* = D^*S^*$ .