Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 4

Cvičenia 11. marca 2014 - Vzájomná poloha afinných priestorov

---

1. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby dve afinné priamky $x = a_0 + ta_1$ a $y = b_0 + tb_1$ ležali v nejakej afinnej rovine.

2. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby sa cez bod $c \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dala viesť priamka pretínajúca sa s dvoma danými afinnými priamkami $x = a_0 + ta_1$ a $y = b_0 + tb_1$. Nájdite metódu ako nájsť takúto priamku.
Spočítajte pre $a_0 = (1, 0, -2, 1)$, $a_1 = (1, 2, -1, -3)$, $b_0 = (0, 1, 1, -1)$, $b_1 = (2, 3, -2, -4)$ a $c = (8, 9, -11, -15)$.

3. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby sa dve afinné priamky $x = a_0+ta_1$ a $y = b_0+tb_1$ pretínali v jednom bode, ale neboli totožné. Nájdite metódu ako nájsť ich priesečník.
Spočítajte pre $a_0 = (2, 1, 1, 3, -3)$, $a_1 = (2, 3, 1, 1, -1)$, $b_0 = (1, 1, 2, 1, 2)$ a $b_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$.

4. a) Ukážte, že ľubovoľné dve afinné priamky v $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $(n \geq 3)$ ležia v nejakej trojrozmernej afinnej podvariete.
b) Ukážte, že ľubovoľné dve afinné variety dimenzií m a n ležia v nejakej afinnej variete dimenzie $m + n + 1$.

5. Ukážte, že dva afinné priestory $P_1 = A_1 + V_1$ a $P_2 = A_2 + V_2$ sa pretínajú práve vtedy, keď vektor A_1A_2 patrí do priestoru $V = V_1 + V_2$.

Dodatočné úlohy

6. Ukážte, že ak afinná priamka má dva spoločné body s afinným podpriestorom P, potom v ňom celá leží.

7. Majme dve afinné variety $P_1 = L_1 + x_1$ a $P_2 = L_2 + x_2$, kde L_1 a L_2 sú vektorové podpriestory $\mathbb{R}^n$ a x_1, x_2 sú dva body priestoru $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ukážte, že $P_1 = P_2$ práve vtedy, keď $L_1 = L_2$ a $x_1 - x_2 \in L_1$.

8. Ukážte, že telesová diagonála n-rozmerného rovnobežnostena je rozdelená na n rovnakých častí priesečníkmi s $(n-1)$-rozmernými afinnými podvarietami prechádzajúcimi cez vrcholy rovnobežnostena, rovnobežnými s podvarietou prechádzajúcou cez konce n hrán, začiatkom ktorých je jeden z bodov diagonály.
Inými slovami: Rovnobežnosten je generovaný vektormi A_0A_1, A_0A_2, $\ldots$, A_0A_n. Zaujímajú nás priesečníky telesovej diagonály vychádzajúcej z A_0 s podpriestormi rovnobežnými s $A_1A_2 \ldots A_n$.