Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 1

Cvičenia 19. februára 2015 - Determinanty

---

1. Nech D_n je determinant $(1,1,-1)$-tridiagonálnej matice typu $n \times n$:

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & 1 & -1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nájdite hodnotu D_n (napr. pre $n = 6$) priamym výpočtom. Overte, že Laplaceovým rozvojom podľa prvého riadku dostaneme $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$, čo je predpis pre *Fibonacciho postupnosť*.

2. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite (jedinú) permutáciu, ktorá zodpovedá nenulovému členu vo vzorci pre výpočet determinantu. Rozhodnite či je táto permutácia párna alebo nepárna a vypočítajte $\det A$.

3. Antisymetrická matica spĺňa $K^T = -K$, napríklad

$$K = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

a) spočítajte determinant takejto 3×3 matice.
b) aký bude determinant pre iné $n \times n$ antisymetrické matice?
c) vysvetlite prečo pre $n \times n$ antisymetrickú maticu platí $\det(-K) = (-1)^n \det(K)$. Spojte to s rovnosťou $\det(K) = \det(K^T)$ (tá platí vždy) a dokážte pozorovanie z časti b).

4. Nájdite determinant matice (šikovným použitím riadkových a stĺpcových operácií)

$$A = \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-t \end{bmatrix}.$$

5. Nájdite determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{bmatrix}.$$

Dodatočné úlohy

6. Ako súvisia hodnoty determinantov $\det(2A)$, $\det(-A)$ a $\det(A^2)$ s hodnotou determinantu $\det(A)$ pre $n \times n$ maticu A?

7. Nájdite $\det A$ ak $a_{ij} = i + j$.

8. Vypočítajte determninant matice

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

buď elimináciou alebo rozvojom podľa riadku. Nájdite tiež determinanty menších matíc A_3 a A_2 – s nulami na diagonále a jednotkami na ostatných miestach. Vedeli by ste predpovedať hodnotu $\det A_n$?

9. Ak sú zložky matice A celé čísla a $\det A$ je 1 alebo -1, ukážte, že aj zložky matice A^{-1} budú celočíslené. Nájdite nejaký 2×2 príklad (nediagonálny).

10. Majme maticu A typu 2014×2015 a maticu B typu 2015×2014. Je možné aby platilo $\det AB = 1$ a $\det BA = 2$?

11. Ak v matici A je súčet zložiek v každom riadku nula, ukážte, že $\det A = 0$. Ak je súčet zložiek v každom riadku 1, ukážte, že $\det(A - I) = 0$. Nájdite takú maticu A, pre ktorú z toho nevyplýva, že $\det A = 1$.

12. Ukážte, že pre pre všeobecné matice typu 4×4 rozdelené na podbloky veľkosti 2×2 platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D, \qquad \text{ale} \qquad \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C.$$

Na druhej strane, za predpokladu, že A je regulárna však platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B).$$

13. Nájdite determinant matice M, ktorá vznikne z jednotkovej matice nahradením j-teho stĺpca vektorom x^T:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & x_j & & \\ & & \cdot & 1 & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}.$$

14. a) Načrtnite trojuholník s vrcholmi $A = (2,2)$, $B = (-1,3)$ a $C = (0,0)$. Považujúc tento trojuholník za polovicu nejakého rovnobežníka (ktorého?), vysvetlite prečo je jeho obsah

$$\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Predpokladajme, že tretí vrchol tentoraz bude $C = (1,-4)$. Zdôvodnite platnosť vzorca:

$$\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomôcka: odpočítaním tretieho riadku od prvých dvoch dostaneme:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

15. a) Ukážte, že determinant $n \times n$ matice spĺňa

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & ab & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

b) Nájdite také a a b aby $a+b=1$ a $ab=-1$, a s pomocou príkladu č. 1 odvoďte explicitný vzorec pre výpočet členov Fibonacciho postupnosti.