

1. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D.$$

Ukážte, že ak A a C komutujú, potom sa determinant rovná $\det(AD - CB)$.

2. *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite, resp. nájdite protipríklad:

- Ak A je symetrická matica, potom $A + iI$ je regulárna.
- Ak Q je ortogonálna matica, potom $Q + \frac{1}{2}I$ je regulárna.
- Ak A má reálne zložky, potom $A + iI$ je regulárna.
- Existuje matica A taká, že matice typu $A + cI$ sú invertibilné pre všetky komplexné čísla c .
- Existuje reálna matica A taká, že $A + rI$ bude invertibilná pre všetky reálne r .

3. a) Nájdite nenulovú maticu N , takú aby $N^3 = 0$.

b) Ukážte, že ak $Nx = \lambda x$, potom λ musí byť nula.

c) Dokážte, že N (ktorá sa nazýva *nilpotentná*) nemôže byť symetrická.

4. Nech A je nilpotentná matica (t.j. $A^k = 0$ pre nejaké k). Ukážte, že $\det(A + I) = 1$.

Dodatočné úlohy

5. Napíšte maticu \bar{A}^T a spočítajte $C = \bar{A}^T A$ ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aký je vzťah medzi C a \bar{C}^T ? Platí niečo podobné pre každú maticu C , ktorá sa dá zapísať ako $\bar{A}^T A$?

6. a) Ako súvisí determinant matice \bar{A}^T s determinantom matice A ?

b) Dokážte, že determinant ľubovoľnej hermitovskej matice ($\bar{A}^T = A$) je reálne číslo.

c) Ako súvisia vlastné hodnoty matice \bar{A}^T s vlastnými hodnotami matice A ?

7. Ak je matica K anti-symetrická, ukážte, že matica $Q = (I - K)(I + K)^{-1}$ bude ortogonálna. Nájdite Q pre $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Prečo $(I + K)^{-1}$ vždy existuje?