Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 12

Cvičenia 14. mája 2015 - kvadratické formy, definitnosť

---

1. Ak A je záporne definitná matica, aké sú jej vlastné hodnoty, subdeterminanty, diagonálne prvky?

2. V trojrozmernom priestore rovnica $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$ reprezentuje elipsoid, pokiaľ sú všetky λ_i kladné. Opíšte všetky možné plochy, ktoré dostaneme v semidefinitnom alebo indefinitnom prípade.

3. Nájdite kde sa nadobúda maximum a minimum výrazu xAx^T pre jednotkové vektory.

Dodatočné úlohy

4. Ak $A = RR^T$ dokážte zovšeobecnenú Cauchy–Schwarzovu nerovnosť $|xAy^T|^2 \leq (x^T Ax)(y^T Ay)$. Kedy nastáva rovnosť?

5. Rozhodnite, či nasledujúce množiny matíc tvoria grupy vzhľadom na násobenie: ortogonálne matice Q, kladne definitné matice A, matice s kladnými vlastnými hodnotami, matice D s determinantom 1, regulárne matice, ktoré sa dajú napísať ako polynóm z matice A, t.j. matice tvaru $p(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$. Skúste nájsť čo najväčšiu grupu obsahujúcu iba kladne definitné symetrické matice.

6. Skúste zistiť znamienka vlastných hodnôt matice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & n \end{bmatrix}.$$

(Návod: použite kritériá na definitnosť...)

7. Ukážte, že ak sú matice A a B kladne definitné, potom je takou aj matica $A + B$.

8. Ak je matica A symetrická a kladne definitná a C je regulárna, ukážte, že matica $B = C^T AC$ je tiež symetrická a kladne definitná.

9. Ak je C regulárna matica, ukážte, že A a $C^T AC$ majú rovnakú hodnosť. Teda nula ako vlastná hodnota má pre obe matice rovnakú násobnosť.

10. Experimentovaním zistite signatúru $2n \times 2n$ matice

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

kde B je regulárna $n \times n$ matica.

11. Nech A je symetrická a kladne definitná matica. Ukážte, že jej maximálne zložky sa musia nachádzať na diagonále.

12. Ak A je symetrická a kladne definitná $n \times n$ matica, tak sa dá zapísať ako $A = RR^T$. Ukážte, že potom $\det A \leq a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$.

Táto nerovnosť sa tiež zvykne nazývať Hadamardova, lebo využíva porovnanie determinantu matice R a súčinu dĺžok riadkov (stĺpcov) R.