Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 3

Cvičenia 5. marca 2015 - Afinné priestory a sústavy rovníc

---

**1.** Označme ako $V_1$ množinu riešení rovnice $u+v+w=2$ – je to nadrovina v $\mathbb{R}^3$ a súčasne dvojrozmerný afinný podpriestor $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Podobne nech $V_2$ označuje množinu riešení rovnice $u+3v+3w=0$.

Pre priestory $V_1$ a $V_2$ nájdite vyjadrenie v tvare (bod + vektorový priestor). Nájdite prienik $V_1 \cap V_2$ a porovnajte s priestorom $W$ riešení sústavy rovníc:

$$u+v+w=2 \qquad u+3v+3w=0$$

**2.** Nájdite parametrické rovnice roviny, ktorá prechádza trojicami bodov:
a) $(1,3,2)$, $(4,1,-1)$, $(2,0,0)$,
b) $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$,
c) $(2,-1,3)$, $(1,1,1)$, $(3,0,4)$.
Ako by sa našlo analytické vyjadrenie týchto rovín?

**3.** Nájdite predpis afinnej transformácie priestoru $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, ktorá zobrazuje trojuholník s vrcholmi $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$ na trojuholník s vrcholmi $(a,b)$, $(c,d)$ a $(e,f)$.

b) skúste nájsť podmienku (rovnicu), ktorú musia spĺňať čísla $a,b,c,d,e,f$ aby bola daná afinná transformácia izomorfizmom.

c) ak nejde všeobecný prípad, skúste trojice $(1,0)$, $(0,3)$, $(-1,0)$ a $(1,1)$, $(3,3)$, $(1,2)$.

**4.** Dokážte, že tri telesové uhlopriečky rovnobežnostena sa pretínajú v jednom bode. (V akom?)

**5.** V $\mathbb{R}^3$ uvažujme jednotkovú sféru $S^2$ danú rovnicou $x^2+y^2+z^2=1$. Cez bod $B=(x_0,y_0,z_0)\in S^2$ prechádza dotyková rovina $T_B$ k sfére $S^2$. Nájdite vektorovú zložku roviny $T_B$ ako afinného podpriestoru priestoru $\mathbb{R}^3$.

Cez bod $B$ prechádza aj tzv.*normálová priamka* $N_B$ k sfére $S^2$, kolmá na dotykovú rovinu $T_B$. Nájdite jej vektorovú zložku.

**6.** Priamku prechádzajúcu cez body $U$ a $V$ (koncové body vektorov $u=\overrightarrow{0U}$ a $v=\overrightarrow{0V}$) môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov $\overrightarrow{0P}=\{tu+(1-t)v \,|\, t\in\mathbb{R}\}$. Ukážte, že každá afinná tansformácia $f$ zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej bodmi $A$ a $B$ sa zobrazí na stred úsečky z $f(A)$ do $f(B)$.

**Dodatočné úlohy**

**7.** Ukážte, že ťažisko štvorstena delí jeho ťažnice v pomere 3 : 1, t.j. leží v ich štvrtine.

**8.** Nájdite prienik nasledujúcich afinných priestorov:

$$V_1=(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},1)+s(1,-1,0)+t(1,1,-2) \qquad \text{a} \qquad V_2=(2,0,1)+p(1,0-1)+r(0,1,2).$$

**9.** V afinnom priestore $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ majme body $A$, $B$ a $C$.

a) Nájdite barycentrické súradnice $(l_A,l_B,l_C)$ tak, aby kombinácia $l_AA+l_BB+l_CC$ zodpovedala ťažisku trojuholníka $ABC$.

b) Nájdite barycentrické súradnice $(m_A,m_B,m_C)$ tak, aby kombinácia $m_AA+m_BB+m_CC$ zodpovedala stredu vpísanej kružnice trojuholníka $ABC$.

c) Nájdite barycentrické súradnice $(n_A,n_B,n_C)$ tak, aby kombinácia $n_AA+n_BB+n_CC$ zodpovedala stredu opísanej kružnice trojuholníka $ABC$.

*Pozn.* súradnice $m_i$, $n_i$ môžu výjsť "škaredo", t.j. budú závisieť od konkrétnej voľby bodov $A,B,C$ – budú to nejaké skalárne funkcie závislé od polohy trojice $A,B,C$.