

Úlohy z minulých cvičení – 5.4, 5.3, staršie prednáškové úlohy – 4.5, 4.6

1. Aký uhol zvierá vektor  $x = (2, 2, 1, 1)$  s podpriestorom generovaným vektormi  $a_1 = (3, 4, -4, -1)$  a  $a_2 = (0, 1, -1, 2)$ .

2. Nájdite uhol, ktorý zvierá hlavná diagonála  $n$ -rozmernej kocky s jej  $k$ -rozmernou hranou/stenou.

### Dodatočné úlohy

*Otázka:* Ako definovať uhly medzi podpriestormi  $U$  a  $V$  dimenzie väčšej ako 1?

*Odpoveď:* Na to sú vhodné tzv. hlavné uhly [http://en.wikipedia.org/wiki/Principal\\_angles](http://en.wikipedia.org/wiki/Principal_angles). Prvý hlavný uhol sa definuje ako:

$$\theta_1 = \min \left\{ \arccos \left( \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \right) \mid u \in U, v \in V \right\}.$$

Ďalšie hlavné uhly sa potom počítajú rekurzívne, minimalizujeme podobný výraz na ortogonálnych doplnkoch k už spočítaným hlavným vektorom  $u_i, v_i$ .

$$\theta_i = \min \left\{ \arccos \left( \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \right) \mid u \in U, v \in V, u \perp u_j, v \perp v_j, \forall j \in \{1, 2, \dots, j-1\} \right\}.$$

3. Nájdite uhol medzi afinnými priestormi:

$$\alpha = (1, 0, 0, 0)s + (0, 1, 0, 0)t + (3, 1, 0, 1),$$

$$\beta = (1, 1, 1, 1)p + (1, -1, 1, -1)r + (2, 1, 1, 3).$$

4. Body  $A_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $A_1 = (0, 1, 0, 0, 0)$ ,  $A_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $A_3 = (0, 0, 0, 1, 0)$ ,  $A_4 = (0, 0, 0, 0, 1)$  v  $\mathbb{R}^5$  tvoria tzv. *štvorrozmerný simplex* (štvorrozmerná obdoba rovnostranného trojuholníka, či pravidelného štvorstena). Nájdite uhol medzi jeho dvojrozmernými stenami  $A_0A_1A_2$  a  $A_0A_3A_4$ .

5. Aká matica zodpovedá zmene bázy z  $v_1, v_2, \dots, v_n$  na  $v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}$ , kde  $\sigma$  je permutácia  $n$ -prvkovej množiny?

Prečo by takéto matice mali tvoriť podgrupu  $GL(n, \mathbb{R})$ ? Ktoré permutácie zachovávajú orientáciu bázy? Tvorí tiež grupu? Skúmajte pre  $n = 3, 4$  a popíšte  $A_n \subset S_n$ .

6. Aká zmena bázy zodpovedá elementárnym maticiam z Gaussovej eliminácie?

Presvedčte sa prečo sú nové množiny vektorov naozaj bázou. Ktorá elementárna operácia zachováva orientáciu a ktorá mení?

7. Zachováva Gramm-Schmidtova ortogonalizácia, ak ju aplikujeme na nejakú bázu, orientáciu?