



Doplnkové cvičenia z algebry a geometrie II. – úlohy č. 1

Cvičenia 24. februára 2016 - Lineárne zobrazenia

1. Rozhodnite, či zloženie piatich osových symetrií a ôsmich rotácií roviny dá rotáciu alebo osovú symetriu. Záleží na poradí v ktorom tieto transformácie robíme?

2. Nájdite matice typu 3×3 reprezentujúce transformácie v $\mathbb{R}^3$, ktoré

- sprojektujú každý vektor do roviny xy ,
- zobrazia každý vektor symetricky podľa roviny xy ,
- otočia rovinu xy o uhol γ , nechajúc os z namieste,
- otočia rovinu xy , potom rovinu xz a nakoniec rovinu yz , vždy o 90° ,
- spravlia tie isté rotácie ako v iv) len vždy o 180° .

3. Priestor všetkých matíc typu 2×2 má štyri bázové “vektory”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že operácia *transpozície* je lineárnou transformáciou na tomto priestore a nájdite príslušnú maticu A v tejto báze. Prečo platí $A^2 = I$?

4. Priamku prechádzajúcu cez koncové body vektorov u a v môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov $P = \{tu + (1-t)v \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ukážte, že každá lineárna transformácia α zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov x a y sa zobrazí na stred úsečky z $\alpha(x)$ do $\alpha(y)$.

5. Nájdite maticu lineárnej transformácie (je to naozaj lineárna transformácia?) z priestoru polynómov $P_3(t)$ do priestoru $P_4(t)$, ktorá každému polynómu priradí jeho $(2+3t)$ -násobok.

6. Predpokladajme, že α je lineárna transformácia roviny xy reprezentovaná maticou M . Ukážte, že ak existuje zobrazenie α^{-1} , potom je aj ono lineárnou transformáciou. Vysvetlite prečo matica M^{-1} reprezentuje α^{-1} .

7. Lineárna transformácia posielajúca vektor tvaru $(x_1, x_2, x_3)^T$ do $(x_2, x_3, x_1)^T$ je rotácia. Nájdite jej os a uhol.

8. Vymyslite vektorový priestor, ktorý obsahuje všetky lineárne transformácie z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. Musíte definovať sčítanie lineárnych transformácií, ako aj násobenie skalárom. Aká bude dimenzia takéhoto priestoru?

9. Ako by sa dala skonštruovať matica, ktorá zobrazí vektory štandardnej bázy e_1, e_2, e_3 na dané vektory v_1, v_2, v_3 ? Kedy bude takáto matica regulárna?

10. Vo vektorovom priestore $P_3(t)$ polynómov stupňa 3, t.j. $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$, majme podmnožinu S polynómov spĺňajúcich $\int_0^1 p(t)dt = 0 \in \mathbb{R}$. Overte, že S je podpriestor a nájdite jeho bázu.

Pozn. Použite vzorec $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$. Všimnite si, že zobrazenie $p(t) \mapsto \int_0^1 p(t)dt$ je lineárna transformácia z $P_3(t)$ do $\mathbb{R}$ a množina S jej jadro.

11. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Ukážte, že ak $v_1, v_2, \dots, v_n$ sú lineárne závislé, tak aj $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ sú lineárne závislé.

12. Nech $f : V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F . Dokážte:

Ak S je podpriestorom vektorového priestoru V , tak jeho obraz $f(S) = \{f(v) \mid v \in S\}$ je podpriestor priestoru W .

Ak T je podpriestorom vektorového priestoru W , tak jeho *vzor* $f^{-1}(T) = \{v \in V \mid f(v) \in T\}$ je podpriestor priestoru V .

13. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takého, že $f((1, 2, 3, 3)^T) = (0, 0, 0, 0)^T$, $f((1, 1, 3, 2)^T) = (1, 0, 3, 1)^T$, $f((1, 1, 2, 0)^T) = (2, 0, 1, 0)^T$ a $f((1, 0, 3, 1)^T) = (2, 1, 3, 1)^T$.