Doplnkové cvičenia z algebry a geometrie II. – úlohy č. 2

Cvičenia 2. marca 2016 - Jadro, Obraz, Inverzné matice

---

1. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^4$ daného maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Nech $f : V \to V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 rozumieme $f \circ f$. Dokážte, že:
a) $\mathrm{Ker}(f^2) \supseteq \mathrm{Ker}(f)$,
b) $\mathrm{Im}(f^2) \subseteq \mathrm{Im}(f)$,
c) $f^2 = 0$ práve vtedy, keď $\mathrm{Ker}(f) \supseteq \mathrm{Im}(f)$,
d) ak $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, potom $\mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f)$,
e) ak $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$, potom $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f)$.

3. Nech $f : U \to V$ je lineárne zobrazenie medzi vektorovými priestormi U a V a $u_1, u_2, \dots u_n$ je báza priestoru U. Ukážte, že obrazy $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď je jadro zobrazenia f netriviálne, t.j. $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$.

4. *Stopa matice* je súčet zložiek na jej hlavnej diagonále, t.j. pre $A = (a_{ij})$ typu $n \times n$ je $\mathrm{tr}(A) = \sum a_{ii}$.
a) Ukážte, že pre ľubovoľné štvorcové matice A, B platí $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
b) Nech $C \in M_{n,n}$ je (ľubovoľná) štvorcová matica typu $n \times n$. Ukážte, že zobrazenie $T_C : M_{n,n} \to \mathbb{R}$ dané predpisom $T_C : A \mapsto tr(AC)$ je lineárne zobrazenie.
c) Pre jednotkovú maticu I_n nájdite jadro a obraz zobrazenia T_I, určite ich dimenzie a bázy.
d) Pre aké matice (nájdite všetky) bude pre obraz zobrazenia platiť $\mathrm{Im}(T_X) \neq \mathbb{R}$. Aké sú dimenzie obrazu a jadra v tomto prípade? O aké priestory ide?

5. Nech A je 2×2 matica. Definujme zobrazenie T_A na priestore $M_{2,2}$ matíc typu 2×2 ako

$$T_A : M_{2,2} \to M_{2,2}, \qquad T_A(X) = AX^T + XA^T.$$

a) Ukážte, že T_A je lineárne zobrazenie.
b) Nájdite dimenzie a bázy pre jadrá a obrazy zobrazení T_I, T_J a T_K pre $I = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ a $K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
c) Ako bude vyzerať obraz zobrazenia T_A pre ľubovoľnú regulárnu maticu A? Zdôvodnite.
d) Ak $X \in \mathrm{Ker}(T_A)$, čo sa dá povedať o AX^T? Čo z toho vieme o dimenzii $\mathrm{Ker}(T_A)$ pre regulárnu maticu A?

6. Nech $\mathcal{P}_5(x)$ je vektorový priestor polynómov supňa nanajvýš 5 s reálnymi koeficientami a premennou x. Zobrazenie T je dané predpisom $T(p(x)) = xp'(x)$, kde $p'(x)$ je derivácia polynómu $p(x)$.
a) Ukážte, že zobrazenie T je lineárne.
b) Nájdite nejakú bázu priestoru $\mathcal{P}_5$ a maticu zobrazenia T vzhľadom na túto bázu.
c) Nájdite jadro a obraz zobrazenia T.
d) Pre aké $k \in \mathbb{R}$ má zobrazenie $T - k \cdot id_{\mathcal{P}}$ netriviálne jadro? Nájdite všetky také k a príslušné jadrá.

7. Nájdite inverzné matice k maticiam

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Nájdite inverzné matice, ak existujú, pre:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako by vyzerali inverzné matice pre $n \times n$ matice v takomto tvare? Čo by sa stalo, ak by sme v nich zmenili dvojky na nejaký všeobecný parameter k?

9. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

v jej redukovanom tvare dostaneme nulový riadok, resp. nulu na diagonále. Ukážte, že k takejto matici neexistuje inverzná. Tretí riadok inverznej matice A^{-1} násobený maticou A by mal dať tretí riadok súčinu $A^{-1}A = I$. Prečo je to nemožné?

10. Ktoré z vlastností matice sa zachovávajú aj pre maticu k nej inverznú?
a) A je trojuholníková,
b) A je symetrická,
c) A je tridiagonálna (t.j. nenulové prvky môžu byť iba na hlavnej diagonále a na dvoch diagonálach s ňou susediacich),
d) všetky zložky A sú celé čísla,
e) všetky zložky A sú racionálne čísla.

11. Nájdite inverznú maticu pre 3×3 Hilbertovu maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

pomocou Gaussovej emiminácie dvoma spôsobmi – najprv presným výpočtom so zlomkami, potom so zaokrúhlovaním každej zložky na tri platné číslice. Porovnajte.

Pokračovanie úlohy: Nájdite si nejaké programy, ktoré počítajú inverzné matice a poznajú zlomky (internet?). Dajte im nájsť inverznú maticu k Hilbertovej pre $n = 5, 6, 7 \dots$. Čo im výjde? Ktoré vedia "počítať so zlomkami" a ktoré nie? Prečo asi?

12. a) Existuje 16 rôznych 2×2 matíc so zložkami 0 alebo 1. Koľko z nich je regulárnych?
b) Podobne, máme šesťnásť rôznych 2×2 matíc so zložkami 1 alebo -1. Koľko z nich je regulárnych?
c) (ťažšie) Ak náhodne vpíšeme nuly a jednotky do 10×10 matice, je pravdepodobnejšie, že bude regulárna alebo singulárna?

13. Ak B je inverzná matica k A^2, ukážte, že inverzná matica k (štvorcovej) A bude AB.

Pozn. Uvedomte si, že to znamená, že A je invertibilná práve vtedy, keď A^2 je. Ako by sa toto tvrdenie dalo dokázať pomocou skúmania hodností, dimenzií jadier resp. obrazov lineárnych zobrazení zodpovedajúcich maticiam A a A^2?

14. Nájdite hodnotu c v nasledujúcej $n \times n$ inverznej matici:

$$\text{ak } A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdot & -1 \\ -1 & n & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot & n \end{bmatrix}, \text{ potom } A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} c & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & c & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & c \end{bmatrix}.$$

Pozn. n vo veľkosti $n \times n$ matice a n vovnútri matice A je to isté n.

15.* Nech A a B sú štvorcové matice. Ukážte, že $I - AB$ je invertibilná práve vtedy, keď $I - BA$ je invertibilná. Výjdite z rovnosti $B(I - AB) = (I - BA)B$. Venujte špeciálnu pozornosť prípadu, keď je matica B singulárna.

Ukážte, že niečo podobné platí aj pre obdĺžnikové matice – A typu $m \times n$, B typu $n \times m$ a štvorcové matice $I_m - AB$ a $I_n - BA$.