Doplnkové cvičenia z algebry a geometrie II. – úlohy č. 3

Cvičenia 16. marca 2016 - matica zobrazenia, riadkové operácie, inverzné matice

---

1. Pre matice
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{a} \qquad C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
nájdite mocniny A^2, A^3, ..., B^2, B^3, ... a C^2, C^3, ...

2. Nájdite LU rozklad pre maticu A, ako aj lineárny systém $Ux^T = c^T$ v hornom trojuholníkovom tvare, ktorý vznikne elimináciou pre
$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. Nájdite rozklady $PA = LDU$ (a skontrolujte ich) pre
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
V oboch prípadoch robte elimináciu tak, ako ste zvyknutí, ale navyše si zapíšte každú elementárnu maticu. V prvom prípade by Vám malo výjsť poradie P, $E_{3,1}$, $E_{3,2}$, teda rovnosť $E_{3,2}E_{3,1}PA = U$, z čoho sa už ľahko dá nájsť rozklad.

V druhom prípade by poradie malo výjsť $E'_{2,1}$, $E'_{3,1}$, P', teda rovnosť $P'E'_{3,1}E'_{2,1}A' = U'$. Matice P' a $E'_{3,1}$, resp. $E'_{2,1}$, nekomutujú, ale platí $P'E_{3,1} = F_{2,1}P'$ pre nejakú inú elementárnu maticu $F_{2,1}$, a tiež $P'E_{2,1} = F_{3,1}P'$ pre nejakú $F_{3,1}$. Ukážte, že matice $F_{2,1}$ a $F_{3,1}$ navzájom komutujú, čiže môžeme prejsť k rovnosti $P'E'_{3,1}E'_{2,1}A' = F_{3,1}F_{2,1}P'A' = U'$. Vysvetlite čo postupnosť operácií daných maticami P', $F_{2,1}$ a $F_{3,1}$ robí so systémom, a aký je význam danej maticovej rovnosti $P'E'_{3,1}E'_{2,1} = F_{3,1}F_{2,1}P'$.

4. Pomocou eliminácie nájdite rozklad matice $A = LU$, ak
$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$
Akú podmienku musia spĺňať čísla a, b, c, d aby boli stĺpce A lineárne nezávislé?

5. Každý riadok matice AB je kombináciou riadkov matice B. To znamená, že *riadkový priestor matice AB je podmnožinou riadkového priestoru matice B (alebo sa mu rovná).* Uveďte príklad, kde sa riadkové priestory matíc B a AB nerovnajú.

6. Nájdite maticu s požadovanými vlastnosťami, alebo dokážte, že taká nemôže existovať.

a) Priestor generovaný stĺpcami obsahuje $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, priestor generovaný riadkami obsahuje $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) Priestor generovaný stĺpcami má bázu $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, priestor riešení homogénneho systému $Ax^T = 0$ má bázu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Priestor generovaný stĺpcami $= \mathbb{R}^4$, priestor generovaný riadkami $= \mathbb{R}^3$.

7. Prečo nemôže existovať matica, ktorej nulový aj riadkový priestor by obsahovali vektor $[1, 1, 1, 1]^T$?

Nulový priestor matice A typu $m \times n$ je priestor homogénnych riešení $\{x \in \mathbb{R}^n | \, Ax^T = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Riadkový priestor matice A je priestor generovaný jej riadkami, t.j. $\{yA | \, y \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. **3.** Ak A je $n \times n$ matica spĺňajúca $A^2 = A$ a A má hodnosť n, potom ukážte, že $A = I$.

Nech A je matica typu $m \times n$. Matica B typu $n \times m$ sa nazýva *pravá inverzná* matica k matici A, ak platí $AB = I$. Matica C typu $n \times m$ sa nazýva *ľavá inverzná* matica k matici A, ak platí $CA = I$.

8. Ak B je pravá inverzná matica k matici A, čo sa dá povedať o zobrazeniach $f : x \mapsto xA$ a $g : y \mapsto yB$? Ktoré z nich je surjektívne/injektívne? Čo to vypovedá o hodnosti matíc A a B?

9. Akú podmienku musí spĺňať matica A, aby sústava $Ax^T = e_i$ mala riešenie pre každý vektor e_i zo štandardnej bázy $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ priestoru $\mathbb{R}^m$?. Vyplýva z toho existencia pravej inverznej matice k matici A? Aká je štruktúra riešení systému $Ax^T = e_i$? Čo to znamená pre pravé inverzné matice?

10.(*Paradox*) Majme pravú inverznú maticu k A, teda $AB = I$. Po prenásobení maticou A^T dostaneme $A^T AB = A^T$, z čoho $B = (A^T A)^{-1} A^T$. Ale potom $BA = I$, t.j. B by mala byť aj *ľavá* inverzná matica k A. Ktorý krok v tomto “dôkaze” je nekorektný?