Doplnkové cvičenia z algebry a geometrie II. – úlohy č. 4

Cvičenia 23. marca 2016 - Grupy, podgrupy, homomorfizmy

---

1. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine M grupu? Je táto grupa komutatívna? Zostrojte tabuľku grupovej operácie v prípade $M = \{1, 2, 3\}$.

2. Nech $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Je G s operáciou $\cdot$ (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Je $(C_n, \cdot)$ grupa?

3. Dokážte, že ak $(G, \cdot)$ je grupa a $x, y, z \in G$ tak platí

$$xy = xz \Rightarrow y = z,$$
$$yx = zx \Rightarrow x = z.$$

(Tzv. *zákony o krátení* v grupe.)

4. Nech $(G, *)$ je grupa a e je jej neutrálny prvok. Dokážte:

$$x * y = y * x \Leftrightarrow x * y * x^{-1} * y^{-1} = e.$$

5. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jej prvok, tak zobrazenie $f_a : G \to G$ definované ako $f_a(b) = a \circ b$ je bijekcia.

6. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $f : G \to G$ definované ako $f(a) = a^{-1}$ je bijekcia. Je to aj homomorfizmus?

7. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že $a \circ a = e$.

8. Nech konečná množina $G = \{e, a_1, \ldots, a_2\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a e je jej neutrálny prvok. Dokážte, že $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e$. Nájdite príklad takej grupy, pre ktorú $a_1 * a_2 * \cdots * a_n \neq e$.

9. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n} | \, m, n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

10. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_4$ (v oboch prípadoch operácia $\oplus$). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? (Viete na základe výsledku zdôvodniť, že tieto dve grupy nie sú izomorfné?)

11. Nech H je podgrupa grupy G. Nech $g \in G$. Ukážte, že $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | \, h \in H\}$ je podgrupa grupy G.

12. Zistite, či sú grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ a $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ izomorfné.

13. Sú grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$ izomorfné? (Operáciu $+$ na množine $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ chápeme po zložkách, t.j. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 \oplus_2 x_2, y_1 \oplus_3 y_2)$. Operácie $\oplus_2$ a $\oplus_3$ označujú sčítanie modulo 2 resp. modulo 3 – použili sme iné označenie, aby sa zdôraznilo, že na prvej a druhej súradnici máme inú operáciu.)

14. Nech $G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(0, 0)\}$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa? Porovnajte s násobením $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})$.

15. Nech $(G, *)$ je ľubovoľná grupa. Dokážte, že zobrazenie $g \mapsto g * g$ je homomorfizmus z G do G práve vtedy, keď G je komutatívna. Platí rovnaké tvrdenie aj pre $g \mapsto g * g * g$?