Doplnkové cvičenia z algebry a geometrie II. – úlohy č. 5

Cvičenia 27. apríla 2016 - Determinanty

---

1. Nájdite determinanty pre nasledujúce matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Pre akú hodnotu parametra λ je $A - \lambda I$ singulárna?

2. Ako súvisia hodnoty determinantov $\det(2A)$, $\det(-A)$ a $\det(A^2)$ s hodnotou determinantu $\det(A)$ pre $n \times n$ maticu A?

3.Ukážte prečo

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \text{a} \qquad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

4. Koľko výmen riadkov potrebujeme na to, aby sme prešli od matice A k matici I:

$$A = \begin{bmatrix} e_n^T \\ e_{n-1}^T \\ \dots \\ e_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \dots & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \dots \\ e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}?$$

Kedy je $\det A = 1$ a kedy $\det A = -1$?

5. Použitím riadkových operácií overte, že determinant 3×3 Vandermondovej matice je

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Skúste vypočítať aj pre 4×4 a $n \times n$ matice.

6. Pre nasledujúce matice nájdite determinanty použitím Gaussovej eliminácie:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}.$$

7. a) Antisymetrická matica spĺňa $K^T = -K$, napríklad

$$K \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Vysvetlite prečo v 3×3 prípade platí $\det(-K) = (-1)^3 \det K$. Zároveň $\det K^T = \det K$ (toto platí vždy). Z toho vyvoďte, že taká matica má nulový determinant.

b) Nájdite antisymetrickú 4×4 maticu s nenulovým determinantom.

8. Ak v matici A je súčet zložiek v každom riadku nula, ukážte, že $\det A = 0$. Ak je súčet zložiek v každom riadku 1, ukážte, že $\det(A - I) = 0$. Nájdite takú maticu A, pre ktorú z toho nevyplýva, že $\det A = 1$.

9. Predpokladajme, že $CD = -DC$. Nájdite chybu v nasledujúcom dôvodení: Zoberúc determinanty, dostávame $(\det C)(\det D) = -(\det D)(\det C)$, čiže aspoň jedna z matíc C alebo D musí mať nulový determinant. Preto rovnosť $CD = -DC$ môže nastať iba ak C alebo D je singulárna.

10. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite (jedinú) permutáciu, ktorá bude zodpovedať nenulovému členu vo vzorci pre výpočet determinantu. Rozhodnite, či táto permutácia je párna alebo nepárna a vypočítajte $\det A$.

11. *Pravda / Nepravda:* (1) Determinant súčinu $S^{-1}AS$ sa rovná determinantu matice A.
(2) Ak $\det A = 0$, potom aspoň jeden člen v rozvoji na $(n-1)\times(n-1)$ kofaktory musí byť nula.
(3) Matica, ktorej zložky sú iba nuly a jednotky má determinant 1, 0 alebo -1.

12. Nech D_n je determinant $(1, 1, -1)$-tridiagonálnej matice typu $n \times n$:

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & 1 & -1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Overte, že rozvojom podľa prvého riadku dostaneme $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$, čo je predpis pre *Fibonacciho postupnosť* $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

13. Vysvetlite, prečo bude mať 5×5 matica s nulovou 3×3 podmaticou nulový determinant bez ohľadu na to, aké hodnoty budú na miestach označených $*$:

$$\text{determinant matice } A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \text{ je vždy nulový.}$$

14. Vypočítajte determinant matice

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

buď elimináciou alebo rozvojom podľa riadku. Nájdite tiež determinanty menších matíc A_3 a A_2 – s nulami na diagonále a jednotkami na ostatných miestach. Vedeli by ste predpovedať hodnotu $\det A_n$?

15. Nájdite $\det A$ ak $a_{ij} = i + j$.

16. Vysvetlite, ak chápeme determinant ako objem, prečo $\det 3A = 3^n \det A$ pre maticu A typu $n \times n$.

17. Ak $C = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ a $D = \left[\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$, potom rovnicu $CD = -DC$ môžeme prepísať ako

$$CD + DC = 0 \qquad \text{alebo} \qquad \begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Nájdite determinant tejto 4×4 matice A.
(b) Ukážte, že $\det A = 0$ ak $a + d = 0$ alebo $ad - bc = 0$.
Vo všetkých ostatných prípadoch môže nastať $CD = -DC$ iba pre $D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

18. Ukážte, že pre pre všeobecné matice typu 4×4 rozdelené na podbloky veľkosti 2×2 platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D, \qquad \text{ale} \qquad \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C.$$

19. Ak matica A je typu $m \times n$ a B je typu $n \times m$, ukážte, že

$$\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = \det AB. \qquad \left(\textit{Pomôcka:} \text{ vynásobte sprava maticou } \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \right)$$

Overte túto rovnosť na nejakom príklade s $m < n$ a inom s $m > n$. Prečo v druhom prípade vždy dostaneme $\det AB = 0$?

20. Zistite aké znamienko prislúcha v determinante 5×5 matice súčinu $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$. Inými slovami, je permutácia $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ párna alebo nepárna?

21. Nájdite determinant a všetkých deväť členov A_{ij} pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Overte, že A krát A_{adj} je $(\det A)$-násobok jednotkovej matice. Nájdite A^{-1}.

22. a) Nájdite determinant matice M, ktorá vznikne z jednotkovej matice nahradením j-teho stĺpca vektorom x:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & x_j & & \\ & & \cdot & 1 & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ak $Ax = b$, ukážte, že matica AM je rovná matici B_j z Cramerovho pravidla (B_j vznikne z matice A nahradením j-teho stĺpca pravou stranou b).

c) Odvoďte Cramerovo pravidlo zobraním determinantov v rovnosti $AM = B_j$.