Doplnkové cvičenia z algebry a geometrie II. – úlohy č. 6

Cvičenia 4. mája 2016 - Vlastné hodnoty, vlastné vektory, diagonalizácia

---

1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre permutačné matice

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Nájdite tretí riadok matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ . & . & . \end{bmatrix}$$

tak, aby jej charkateristický polynóm $\det(\lambda I - A)$ bol $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 6$.

3. Ukážte, že ak má horná trojuholníková 3×3 matica na diagonále zložky 1, 2 a 7, potom je podobná diagonálnej matici D. Ako bude vyzerať D?

4. (a) Ak $A^2 = I$, aké môže mať matica A vlastné hodnoty?
(b) Ak je takáto (reálna) matica typu 2×2 a nerovná sa I alebo $-I$, nájdite jej stopu a determinant.
(c) Dopočítajte druhý riadok matice, ak je jej prvý riadok $(3, -1)$.

5. Lineárne zobrazenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je v štandardnej báze e_1, e_2, e_3 popísané maticou

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 8 \\ -11 & -15 & -7 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nájdite maticu toho istého zobrazenia v báze $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

6. Predpokladajme, že λ je vlastná hodnota matice A a x je príslušný vlastný vektor, t.j. $xA = \lambda x$.
(a) Ukážte, že x je tiež vlastným vektorom matice $B = A - cI$, kde $c \in \mathbb{R}$. Nájdite vlastnú hodnotu prislúchajúcu vektoru x.
(b) Predpokladajme, že $\lambda \neq 0$. Ukážte, že potom je x vlastným vektorom matice A^{-1} a nájdite vlastnú hodnotu.

7. (a) Skonštruujte 2×2 matice A a B také, že vlastné hodnoty súčinu AB nebudú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B, podobne vlastné hodnoty $A + B$ nebudú súčtom jednotlivých vlastných hodnôt.
(b) Overte, že napriek tomu sa súčet vlastných hodnôt matice $A + B$ rovná súčtu všetkých vlastných hodnôt matíc A a B, podobne pre súčiny. Prečo je to tak?

8. Ak vlastné hodnoty 3×3 matice A sú $1, 1$ a 2, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú zaručene pravdivé? Zdôvodnite v pravdivom prípade, nájdite protipríklad v nepravdivom.
a) A je regulárn,
b) A je diagonalizovateľná,
c) A nie je diagonalizovateľná.

9. *(Pravda/Nepravda)* Predpokladajme, že jedinými vlastnými vektormi matice A sú násobky vektora $x = (1, 0, 0)$.
a) A je singulárna,
b) A má viacnásobnú vlastnú hodnotu,
c) A nie je diagonalizovateľná.

10. Vysvetlite prečo matica A nemôže byť nikdy podobná matici $A + I$.

11. Nájdite A^{100} ak $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

12. Derivácia všeobecného polynómu $a+bx+cx^2+dx^3$ stupňa 3 má tvar $b+2cx+3dx^2$. Pripomeňme si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.
a) Nájdite maticu D zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.

$$\left[\begin{smallmatrix} a & b & c & d \end{smallmatrix}\right] D = \left[\begin{smallmatrix} b & 2c & 3d & 0 \end{smallmatrix}\right].$$

b) Vypočítajte D^4 a vysvetlite výsledok v reči derivácií.
c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice D?

13. Aké sú vlastné hodnoty matice A spĺňajúcej $A^2 = -I$? Ak A je taká reálna $n \times n$ matica, ukážte, že n musí byť párne. Uveďte príklad.

14. Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica J *nie je podobná* matici K:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{a} \quad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Pre ľubovľnú maticu M provnajte JM a MK. Ak sa rovnajú, ukážte, že M nie je invertibilná, a teda rovnosť $M^{-1}JM = K$ nemôže nastať.

15. Majme matice A a B. Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.

16. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D.$$

Ukážte, že ak A a C komutujú, potom sa determinant rovná $\det(AD - CB)$.

17. *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite, resp. nájdite protipríklad:
a) Ak A je symetrická matica, potom $A + iI$ je regulárna.
b) Ak Q je ortogonálna matica, potom $Q + \frac{1}{2}I$ je regulárna.
c) Ak A má reálne zložky, potom $A + iI$ je regulárna.
d) Existuje matica A taká, že matice typu $A + cI$ sú invertibilné pre všetky komplexné čísla c.
e) Existuje reálna matica A taká, že $A + rI$ bude invertibilná pre všetky reálne r.

18. a) Nájdite nenulovú maticu N, takú aby $N^3 = 0$.
b) Ukážte, že ak $Nx = \lambda x$, potom λ musí byť nula.
c) Dokážte, že N (ktorá sa nazýva *nilpotentná*) nemôže byť symetrická.

19. Nech A je nilpotentná matica (t.j. $A^k = 0$ pre nejaké k). Ukážte, že $\det(A + I) = 1$.

20. Predpokladajme, že matice A a B sa dajú diagonalizovať tou istou diagonalizačnou maticou S, teda máme $A = S^{-1}\Lambda_1 S$ a $B = S^{-1}\Lambda_2 S$. Ukážte, že potom matice A a B komutujú a tiež, že vlastné hodnoty súčinu AB sú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B. Ako je to s vlastnými vektormi?

21. Predpokladajme, že každá z matíc A a B má n rôznych vlastných hodnôt. Navyše predpokladajme, že matice A a B komutujú. Ukážte potom, že ak x je vlastný vektor matice A, potom je aj vlastným vektorom matice B. Výjdite z rovnosti $xAB = xBA$.

Pozn. Keďže toto platí pre každý vlastný vektor matice A, matice A a B majú rovnaké všetky vlastné vektory, a preto majú tú istú diagonalizačnú maticu S. Ukázali sme tak spolu s príkladom č. 20, že (diagonalizovateľné) matice komutujú práve vtedy, keď majú rovnaké vlastné vektory.

22. Ukážte, že matice lineárneho zobrazenia pre dve rôzne bázy sú rovnaké práve vtedy, keď matica prechodu komutuje s maticou lineárneho zobrazenia.

23. Nájdite maticu prechodu medzi bázou $1, x, x^2, \ldots, x^n$ a bázou $1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ vo vektorovom priestore polynómov stupňa nanajvýš n.

24. Ako sa zmení matica zobrazenia $\phi : U \to V$ ak zmeníme bázy v oboch vektorových priestoroch?