

1. a) Nájdite 3×3 matice A_1, A_2 zodpovedajúce kvadratickým formám

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

$$f_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

b) Ukážte, že forma f_1 sa dá napísať ako *jeden* štvorec, a teda nie je kladne definitná. Pre aké hodnoty je f_1 rovná nule?

c) Nájdite kanonický tvar pre f_2 , skúste nájsť rozklad A_2 ako LL^T (kde L je dolná trojuholníková matica).

- 2.) Pre aké hodnoty parametra a je matica A kladne definitná?

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Dodatočné úlohy

3. Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2.$$

4. Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, kladne semidefinitné alebo indefinitné

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. S prihliadnutím na vlastné hodnoty ukážte, že ak je matica A kladne definitná, potom sú aj matice A^2 a A^{-1} kladne definitné.

6. Elipsa $u^2 + 4v^2 = 1$ zodpovedá matici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A a načrtnite elipsu. Spravte to isté pre elipsu $5u^2 + 8uv + 5v^2 = 1$.