

## Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 3

Cvičenia 1. marca 2016 - Afinné priestory a sústavy rovníc

---

1. Označme ako  $V_1$  množinu riešení rovnice  $u+v+w = 2$  – je to nadrovina v  $\mathbb{R}^3$  a súčasne dvojrozmerný afinný podpriestor  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ . Podobne nech  $V_2$  označuje množinu riešení rovnice  $u + 3v + 3w = 0$ .

Pre priestory  $V_1$  a  $V_2$  nájdite vyjadrenie v tvare (bod + vektorový priestor). Nájdite prienik  $V_1 \cap V_2$  a porovnajte s priestorom  $W$  riešení sústavy rovníc:

$$u + v + w = 2 \qquad u + 3v + 3w = 0$$

2. Nájdite parametrické rovnice roviny, ktorá prechádza trojicami bodov:

a)  $(1, 3, 2)$ ,  $(4, 1, -1)$ ,  $(2, 0, 0)$ ,

b)  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,

c)  $(2, -1, 3)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(3, 0, 4)$ .

Ako by sa našlo analytické vyjadrenie týchto rovín?

3. Nájdite predpis afinnej transformácie priestoru  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , ktorá zobrazuje trojuholník s vrcholmi  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$  na trojuholník s vrcholmi  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  a  $(e, f)$ .

b) skúste nájsť podmienku (rovnice), ktorú musia spĺňať čísla  $a, b, c, d, e, f$  aby bola daná afinná transformácia izomorfizmom.

c) ak nejde všeobecný prípad, skúste trojice  $(1, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(-1, 0)$  a  $(1, 1)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(1, 2)$ .

4. Dokážte, že tri telesové uhlopriečky rovnobežnostena sa pretínajú v jednom bode. (V akom?)

5. V  $\mathbb{R}^3$  uvažujme jednotkovú sféru  $S^2$  danú rovnicou  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Cez bod  $B = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$  prechádza dotyková rovina  $T_B$  k sfére  $S^2$ . Nájdite vektorovú zložku roviny  $T_B$  ako afinného podpriestoru priestoru  $\mathbb{R}^3$ .

Cez bod  $B$  prechádza aj tzv. *normálová priamka*  $N_B$  k sfére  $S^2$ , kolmá na dotykovú rovinu  $T_B$ . Nájdite jej vektorovú zložku.

6. Priamku prechádzajúcu cez body  $U$  a  $V$  (koncové body vektorov  $u = \overrightarrow{OU}$  a  $v = \overrightarrow{OV}$ ) môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov  $\overrightarrow{OP} = \{tu + (1-t)v \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Ukážte, že každá afinná transformácia  $f$  zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej bodmi  $A$  a  $B$  sa zobrazí na stred úsečky z  $f(A)$  do  $f(B)$ .

### Dodatočné úlohy

7. Ukážte, že ťažisko štvorstena delí jeho ťažnice v pomere 3 : 1, t.j. leží v ich štvrtine.

8. Nájdite prienik nasledujúcich afinných priestorov:

$$V_1 = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) + s(1, -1, 0) + t(1, 1, -2) \qquad \text{a} \qquad V_2 = (2, 0, 1) + p(1, 0 - 1) + r(0, 1, 2).$$

9. V afinnom priestore  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  majme body  $A, B$  a  $C$ .

a) Nájdite barycentrické súradnice  $(l_A, l_B, l_C)$  tak, aby kombinácia  $l_A A + l_B B + l_C C$  zodpovedala ťažisku trojuholníka  $ABC$ .

b) Nájdite barycentrické súradnice  $(m_A, m_B, m_C)$  tak, aby kombinácia  $m_A A + m_B B + m_C C$  zodpovedala stredom vpísanej kružnice trojuholníka  $ABC$ .

c) Nájdite barycentrické súradnice  $(n_A, n_B, n_C)$  tak, aby kombinácia  $n_A A + n_B B + n_C C$  zodpovedala stredom opísanej kružnice trojuholníka  $ABC$ .

*Pozn.* súradnice  $m_i, n_i$  môžu výjsť “škaredo“, t.j. budú závisieť od konkrétnej voľby bodov  $A, B, C$  – budú to nejaké skalárne funkcie závislé od polohy trojice  $A, B, C$ .