Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 4

Cvičenia 15. marca 2016 - Vzájomná poloha afinných priestorov

---

1. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby dve afinné priamky $p \equiv A_0 + ta_1$ a $q \equiv B_0 + tb_1$ ležali v nejakej afinnej rovine.

2. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby sa cez bod $C \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dala viesť priamka pretínajúca sa s dvoma danými afinnými priamkami $p \equiv A_0 + ta_1$ a $q \equiv B_0 + tb_1$. Nájdite metódu ako nájsť takúto priamku.

Spočítajte pre $A_0 \equiv (1, 0, -2, 1)$, $a_1 = (1, 2, -1, -3)$, $B_0 \equiv (0, 1, 1, -1)$, $b_1 = (2, 3, -2, -4)$ a $C \equiv (8, 9, -11, -15)$.

3. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby sa dve afinné priamky $p \equiv A_0 + ta_1$ a $q \equiv B_0 + tb_1$ pretínali v jednom bode, ale neboli totožné. Nájdite metódu ako nájsť ich priesečník.

Spočítajte pre $A_0 \equiv (2, 1, 1, 3, -3)$, $a_1 = (2, 3, 1, 1, -1)$, $B_0 \equiv (1, 1, 2, 1, 2)$ a $b_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$.

4. a) Ukážte, že ľubovoľné dve afinné priamky v $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $(n \geq 3)$ ležia v nejakej trojrozmernej afinnej podvariete.

b) Ukážte, že ľubovoľné dve afinné variety dimenzií m a n ležia v nejakej afinnej variete dimenzie $m + n + 1$.

5. Ukážte, že dva afinné priestory $\mathcal{P}_1 \equiv A_1 + V_1$ a $\mathcal{P}_2 \equiv A_2 + V_2$ sa pretínajú práve vtedy, keď vektor A_1A_2 patrí do priestoru $V = V_1 + V_2$.

Dodatočné úlohy

6. Ukážte, že ak afinná priamka má dva spoločné body s afinným podpriestorom P, potom v ňom celá leží.

7. Majme dve afinné variety $\mathcal{P}_1 \equiv X_1 + L_1$ a $\mathcal{P}_2 \equiv X_2 + L_2$, kde L_1 a L_2 sú vektorové podpriestory $\mathbb{R}^n$ a X_1, X_2 sú dva body priestoru $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ukážte, že $P_1 \equiv P_2$ práve vtedy, keď $L_1 = L_2$ a $X_1 - X_2 \in L_1$.

8. Ukážte, že telesová diagonála n-rozmerného rovnobežnostena je rozdelená na n rovnakých častí priesečníkmi s $(n-1)$-rozmernými afinnými podvarietami prechádzajúcimi cez vrcholy rovnobežnostena, rovnobežnými s podvarietou prechádzajúcou cez konce n hrán, začiatkom ktorých je jeden z bodov diagonály.

Inými slovami: Rovnobežnosten je generovaný vektormi A_0A_1, A_0A_2, $\ldots$, A_0A_n. Zaujímajú nás priesečníky telesovej diagonály vychádzajúcej z A_0 s podpriestormi rovnobežnými s $\overline{A_1A_2 \ldots A_n}$.