Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 6

Cvičenia 22. marca 2016 - Vzdialenosti a uhly medzi afinnými podpriestormi

---

Úlohy z minulých cvičení – 5.2, 5.4, staršie prednáškové úlohy – 8.4

5.2. Nájdite vzdialenosť bodu $X = (4, -1, 3, 7)$ od afinného priestoru zadaného rovnicami:

$$3x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = -5, \qquad 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 + x_4 = 3, \qquad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 3x_4 = -3.$$

5.4. Nájdite vzdialenosť medzi afinnými priestormi:

$$\alpha = (4, 5, 3, 2) + s(1, 2, 2, 2) + t(2, -2, 1, 2),$$
$$\beta = (1, -2, 1, -3) + p(2, 0, 2, 1) + r(1, -2, 0, -1).$$

1. Aký uhol zviera vektor $x = (2, 2, 1, 1)$ s podpriestorom generovaným vektormi $a_1 = (3, 4, -4, -1)$ a $a_2 = (0, 1, -1, 2)$.

2. Nájdite uhol, ktorý zviera hlavná diagonála n-rozmernej kocky s jej k-rozmernou hranou/stenou.

Dodatočné úlohy
Otázka: Ako definovať uhly medzi podpriestormi U a V dimenzie väčšej ako 1?

Odpoveď: Na to sú vhodné tzv. hlavné uhly `http://en.wikipedia.org/wiki/Principal_angles`. Prvý hlavný uhol sa definuje ako:

$$\theta_1 = \min \left\{ \arccos \left(\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \right) \middle| u \in U, v \in V \right\}.$$

Ďalšie hlavné uhly sa potom počítajú rekurzívne, minimalizujeme podobný výraz na ortogonálnych doplnkoch k už spočítaným hlavným vektorom u_i, v_i.

$$\theta_i = \min \left\{ \arccos \left(\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \right) \middle| u \in U, v \in V, u \perp u_j, v \perp v_j, \forall j \in \{1, 2, \ldots, j-1\} \right\}.$$

3. Nájdite uhol medzi afinnými priestormi:

$$\alpha = (1, 0, 0, 0)s + (0, 1, 0, 0)t + (3, 1, 0, 1),$$
$$\beta = (1, 1, 1, 1)p + (1, -1, 1, -1)r + (2, 1, 1, 3).$$

4. Body $A_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $A_1 = (0, 1, 0, 0, 0)$, $A_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $A_3 = (0, 0, 0, 1, 0)$, $A_4 = (0, 0, 0, 0, 1)$ v $\mathbb{R}^5$ tvoria tzv. *štvorrozmerný simplex* (štvorrozmerná obdoba rovnostranného trojuholníka, či pravidelného štvorstena). Nájdite uhol medzi jeho dvojrozmernými stenami $A_0A_1A_2$ as $A_0A_3A_4$.

5. Aká matica zodpovedá zmene bázy z $v_1, v_2, \ldots, v_n$ na $v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots v_{\sigma(n)}$, kde σ je permutácia n-prvkovej množiny?
Prečo by takéto matice mali tvoriť podgrupu $GL(n, \mathbb{R})$? Ktoré permutácie zachovávajú orientáciu bázy? Tvoria tiež grupu? Skúmajte pre $n = 3, 4$ a popíšte $A_n \subset S_n$.

6. Aká zmena bázy zodpovedá elementárnym maticiam z Gaussovej eliminácie?
Presvedčte sa prečo sú nové množiny vektorov naozaj bázou. Ktorá elementárna operácia zachováva orientáciu a ktorá mení?

7. Zachováva Gramm-Schmidtova ortogonalizácia, ak ju aplikujeme na nejakú bázu, orientáciu?