Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 7

Cvičenia 5. apríla 2016 - Vlastné hodnoty a vektory, zmena bázy (súradnicovej sústavy)

Na cvičení sa budeme venovať vlastným vektorom a vlastným hodnotám, medzi dodatočnými úlohami sú aj úlohy na zmenu súradníc.

1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre permutačné matice

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Nájdite tretí riadok matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ . & . & . \end{bmatrix}$$

tak, aby jej charkateristický polynóm $\det(\lambda I - A)$ bol $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 6$.

3. Ukážte, že ak má horná trojuholníková 3×3 matica na diagonále zložky 1, 2 a 7, potom je podobná diagonálnej matici D. Ako bude vyzerať D?

4. (a) Ak $A^2 = I$, aké môže mať matica A vlastné hodnoty?
(b) Ak je takáto (reálna) matica typu 2×2 a nerovná sa I alebo $-I$, nájdite jej stopu a determinant.
(c) Dopočítajte druhý riadok matice, ak je jej prvý riadok $(3, -1)$.

Dodatočné úlohy

5. Lineárne zobrazenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je v štandardnej báze e_1, e_2, e_3 popísané maticou

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 8 \\ -11 & -15 & -7 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nájdite maticu toho istého zobrazenia v báze $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

6. Nájdite maticu prechodu medzi bázou $1, x, x^2, \ldots, x^n$ a bázou $1, x - a, (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n$ vo vektorovom priestore polynómov stupňa nanajvýš n.

7. Ako sa zmení matica zobrazenia $\phi : U \to V$ ak zmeníme bázy v oboch vektorových priestoroch?

8. Ukážte, že matice lineárneho zobrazenia pre dve rôzne bázy sú rovnaké práve vtedy, keď matica prechodu komutuje s maticou lineárneho zobrazenia.

9. Komplexný vektorový priestor $\mathbb{C}^n$ môžeme chápať ako $\mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$ – t.j. ako $2n$-rozmerný reálny vektorový priestor. V štandardnej báze $e_1, e_2, \ldots, e_n, ie_1, ei_2, \ldots ie_n$ zodpovedá násobeniu komplexnou jednotkou i (reálne lineárne zobrazenie, overte) matica

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Pre ktoré iné bázy dá násobenie i rovnakú maticu J?

Pozn. V závislosti od toho, či vektory chápeme ako riadky resp. stĺpce máme dva maticové predpisy: $x \mapsto xJ$ pre riadky a $x^T \mapsto J^T x^T$ pre stĺpce. Preto sa niekedy matica J objavuje v literatúre transponovaná.