Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie II. – úlohy č. 8

Cvičenia 12. apríla 2016 - Vlastné hodnoty a vektory

---

1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

Overte, že súčet $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ sa rovná stope matice a súčin $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ sa rovná determinantu.

2. Nájdite tretí riadok matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

tak, aby jej charkateristický polynóm $\det(\lambda I - A)$ bol $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 6$.

3. Ukážte, že ak má horná trojuholníková 3×3 matica na diagonále zložky 1, 2 a 7, potom je podobná diagonálnej matici D. Ako bude vyzerať D?

4. (a) Ak $A^2 = I$, aké môže mať matica A vlastné hodnoty?
(b) Ak je takáto (reálna) matica typu 2×2 a nerovná sa I alebo $-I$, nájdite jej stopu a determinant.
(c) Dopočítajte druhý riadok matice, ak je jej prvý riadok $(3, -1)$.

Dodatočné úlohy

5. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre permutačné matice

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Predpokladajme, že λ je vlastná hodnota matice A a x je príslušný vlastný vektor, t.j. $xA = \lambda x$.
(a) Ukážte, že x je tiež vlastným vektorom matice $B = A - cI$, kde $c \in \mathbb{R}$. Nájdite vlastnú hodnotu prislúchajúcu vektoru x.
(b) Predpokladajme, že $\lambda \neq 0$. Ukážte, že potom je x vlastným vektorom matice A^{-1} a nájdite vlastnú hodnotu.

7. (a) Skonštruujte 2×2 matice A a B také, že vlastné hodnoty súčinu AB nebudú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B, podobne vlastné hodnoty $A + B$ nebudú súčtom jednotlivých vlastných hodnôt.
(b) Overte, že napriek tomu sa súčet vlastných hodnôt matice $A + B$ rovná súčtu všetkých vlastných hodnôt matíc A a B, podobne pre súčiny. Prečo je to tak?

8. Ak vlastné hodnoty 3×3 matice A sú $1, 1$ a 2, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú zaručene pravdivé? Zdôvodnite v pravdivom prípade, nájdite protipríklad v nepravdivom.
a) A je regulárn,
b) A je diagonalizovateľná,
c) A nie je diagonalizovateľná.

9. *(Pravda/Nepravda)* Predpokladajme, že jedinými vlastnými vektormi matice A sú násobky vektora $x = (1, 0, 0)$.
a) A je singulárna,
b) A má viacnásobnú vlastnú hodnotu,
c) A nie je diagonalizovateľná.