

1. Vysvetlite prečo matica A nemôže byť nikdy podobná matici $A + I$.

2. Nájdite A^{100} ak $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Derivácia všeobecného polynómu $a + bx + cx^2 + dx^3$ stupňa 3 má tvar $b + 2cx + 3dx^2$. Pripomeňme si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.

a) Nájdite maticu D zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b & 2c & 3d & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vypočítajte D^4 a vysvetlite výsledok v reči derivácií.

c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice D ?

4. Aké sú vlastné hodnoty matice A spĺňajúcej $A^2 = -I$? Ak A je taká reálna $n \times n$ matica, ukážte, že n musí byť párne. Uveďte príklad.

5. Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica J *nie je podobná* matici K :

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{a} \quad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Pre ľubovľnú maticu M provnajte JM a MK . Ak sa rovnajú, ukážte, že M nie je invertibilná, a teda rovnosť $M^{-1}JM = K$ nemôže nastať.

Dodatočné úlohy

6. Majme matice A a B . Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.

7. Predpokladajme, že matice A a B sa dajú diagonalizovať tou istou diagonalizačnou maticou S , teda máme $A = S^{-1}\Lambda_1 S$ a $B = S^{-1}\Lambda_2 S$. Ukážte, že potom matice A a B komutujú a tiež, že vlastné hodnoty súčinu AB sú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B . Ako je to s vlastnými vektormi?

8. Predpokladajme, že každá z matíc A a B má n rôznych vlastných hodnôt. Navyše predpokladajme, že matice A a B komutujú. Ukážte potom, že ak x je vlastný vektor matice A , potom je aj vlastným vektorom matice B . Výjdite z rovnosti $xAB = xBA$.

Pozn. Keďže toto platí pre každý vlastný vektor matice A , matice A a B majú rovnaké všetky vlastné vektory, a preto majú tú istú diagonalizačnú maticu S . Ukázali sme tak spolu s príkladom č. 10, že (diagonalizovateľné) matice komutujú práve vtedy, keď majú rovnaké vlastné vektory.