Kombinatorika – Domáca úloha č. 3

Termín odovzdania 8. novembra 2023

---

**1.** Dokážte, že pre $n \geq 1$ platí:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

(T.j. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.)

**2.** Dokážte, že pre ľubovoľné $n$ platí

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n+2}.$$

(znak $\prod$ označuje súčin)

**3.** Majme obdĺžnikovú tabuľku čokolády s $m \times k$ štvorčekmi veľkosti $1 \times 1$. Postupne ju budeme lámať na menšie kúsky nasledujúcim spôsobom: v každom kroku si zvolíme časť ktorá má aspoň dva štvorčeky a rozlomíme ju na dve časti pozdĺž vodorovnej alebo zvislej linajky (linajky tvoria štvorčekovú mozaiku čokolády). Skončíme keď je čokoláda polámaná na štvorčeky veľkosti $1 \times 1$. Ako dlho nám bude trvať kým čokoládu polámeme?

*Návod*: dôležitý nie je tvar tabuľky, ale len počet štvorčekov v kuse čokolády. Tvrdenie preto stačí dokázať pre čokoládu ktorá sa skladá z $n$ štvorčekov veľkosti $1 \times 1$.

Použite matematickú indukciu, potom skúste nájsť argument ktorý indukciu nepoužíva.