Kombinatorické princípy 1

Úlohy 1 - 12 sú na zahriatie, pre každého. Malo by to s nimi ísť hladko, uvidíme :). Zvyšné úlohy sú tiež určené pre každého, teda nebudeme sa hrať na tímy. Ako zvyčajne, riešenia budete prezentovať a budú hodnotené.

1. V istom hoteli sa rozhodli očíslovať izby od 1 do 100 (hotel má 100 izieb). Koľkokrát použili šablónu čísla šesť?

2. Heslo má šesť až osem znakov, aspoň jeden z nich je cifra. Koľko rôznych hesiel môžeme mať?

3. Na internátoch sa uvolnilo 100 miest: 40 na Ľ. Štúra, 34 na Átriákoch, 26 na manželskom internáte. Koľkými spôsobmi môže ubytovacia komisia rozdeliť tieto voľné miesta medzi 100 žiadateľov? Aby to nemala veľmi zložité, každému povie len na ktorý internát ho zaradila. O konkrétnom mieste sa musí uchádzač dohodnúť s ostatnými.

4. Máme k dispozícii 3 kusy jednej knihy, 2 kusy druhej a 1 kus tretej. Koľkými spôsobmi môžeme knihy rozdeliť medzi 20 ľudí ak nikto nedostane viac ako jednu knihu? A koľkými ak nikto nedostane dva exempláre tej istej knihy ale môže dostať 2 alebo 3 knihy?

5. Koľkými spôsobmi je možné vybrať 11 členný futbalový tím a 5 členný basketbalový tím z 30-tich študentov, ak

   a) Nikto nebude v oboch tímoch.
   b) Ľubovoľný počet študentov môže byť v oboch tímoch.
   c) Najviac jeden študent bude v oboch tímoch.

6. Senát pozostáva zo 100 senátorov z 50-tich štátov, každý štát je reprezentovaný dvomi senátormi. Koľkými spôsobmi je možné zvoliť štvorčlenný výbor keď požadujeme, aby vo výbore neboli dvaja senátori z toho istého štátu?

7. V galaxii Andromeda sa konal turnaj vo futbale, ktorého sa zúčastnilo 49 klubov. Zástava každého klubu pozostáva z troch vodorovných pruhov rôznej farby, pričom žiadna zástava nemá farbu rôznu od červenej, modrej, bielej a zelenej. Je pravda, že aspoň tri kluby majú totožnú zástavu?

8. Predpokladajme, že v rovine sú dané dve rovnobežné priamky, pričom na jednej je vyznačených m bodov a na druhej je vyznačených k bodov. Koľko trojuholníkov s vrcholmi vo vyznačených bodoch môžeme dostať?

9. Kombinatorickou úvahou dokážte: Pre $k > 0$ platí
$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

10. Koľko čísel medzi 1 a 10 000 má presne jednu cifru rovnú 5?

11. Koľko je 4 ciferných kladných celých čísel

    a) s nenulovými ciframi,
    b) nepárnych s rôznymi ciframi,
    c) nepárnych s nenulovými rôznymi ciframi?

12. Koľko kladných deliteľov má číslo 6? Tá istá otázka pre číslo 8, číslo 24, číslo $4 \cdot 25 \cdot 7$. Všeobecne: Koľko kladných deliteľov má kladné celé číslo n?

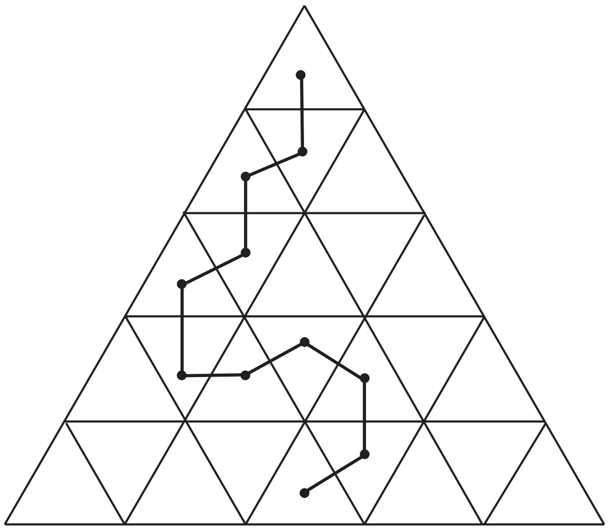
13. Na poličke je 12 kníh. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 5 z nich? A koľkými tak aby žiadne dve ktoré sme vybrali nestáli na poličke vedľa seba?

14. Za okrúhlym stolom sedí 12 rytierov a vzťahy medzi nimi sú zložité. Každý z nich sedí medzi svojimi nepriateľmi (iných nepriateľov za okrúhlym stolom nemá). Koľkými spôsobmi je možné vybrať 5 rytierov ktorí pôjdu zachrániť princeznú, keď medzi vybranými rytiermi nesmú byť žiadni dvaja znepriatelení?

15. Je dané prirodzené číslo $n > 2$ a množina M, ktorej prvkami sú slová dĺžky n v abecede $\{X, Y\}$ a akékoľvek dve rôzne slová sa líšia aspoň na troch miestach. Dokážte nerovnosť
$$|M| \leq \frac{2^n}{n+1}.$$

16. Uvažujme všetky slová dĺžky n v abecede, ktorá pozostáva z k písmen. Dve slová považujeme za rovnaké, ak pri čítaní jedného zprava doľava dostaneme druhé slovo. Napríklad v abecede $\{K, A, T, \star, \bullet\}$ pre $k = 4$ slová KATA a ATAK považujeme za rovnaké, podobne slovo A $\star$ A $\bullet$ a slovo $\bullet$ A $\star$ A nepovažujeme za rôzne. Koľko rôznych slov máme?

17. Uvažujme rovnostranný trojuholník s dĺžkou strany n, ktorý je rozdelený na jednotkové trojuholníky ako na obrázku pre $n = 5$. Nech $f(n)$ počet ciest z horného trojuhoníka do trojuholníka v strede posledného riadku, pričom susedné trojuholníky na ceste majú spoločnú stranu, cesta nikdy nejde zdola nahor (z nižšieho riadku do vyššieho) a nikdy nevedie do trojuholníka ktorý už navštívila. Na obrázku je vyznačená jedna takáto cesta pre $n = 5$. Určte $f(2015)$.



Obr. 1: Jedna z prípustných ciest, prípad $n = 5$