Kombinatorické princípy 2

Na cvičenie si prosím pripravte prezentáciu riešení nasledujúcich úloh. Úlohy sú určené pre všetky tímy.

1. Škola má 105 študentov a ponúka sedem kurzov. Vieme, že každý študent navštevuje tri kurzy, a každý kurz si vybral rovnaký počet študentov. Koľko študentov navštevuje každý kurz?

2. Letná škola z matematiky má 15 účastníkov. Každý deň sú traja z nich zamestnaní prípravou pomôcok, príkladov atď. Po skončení letnej školy sa zistilo, že každá dvojica študentov bola zamestnaná presne raz(teda presne jeden deň). Koľko dní trvala letná škola?

3. Počítač vygeneroval šesť celých čísel $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ a tvrdí o nich, že súčet ľubovoľných štyroch po sebe idúcich čísel je kladný a súčet ľubovoľných troch po sebe idúcich je záporný. Ferko Mrkvička tvrdí, že počítač je šiši. Tak kto má pravdu, počítač alebo FM?(byť šiši = bláboliť)

4. V galaxii Andromeda sa koná turnaj vo futbale do ktorého sa prihlásilo 1 500 tímov. Turnaj sa hrá systémom play off, teda tím ktorý prehrá zo súťaže vypadne. Po koľkých hrách sa dozvieme víťaza súťaže?

5. Koľkými spôsobmi je možné dať 20 rôznych kníh do knihovničky v ktorej je päť políc, keď vieme, že všetky knihy sa vojdú do každej z políc?

6. Koľko je funkcií z $\{1, \dots, n\}$ do $\{1, \dots, n\}$ ktoré nie sú bijektívne? Koľko je prostých funkcií z $\{1, \dots, k\}$ do $\{1, \dots, n\}$?

7. Povieme, že podmnožina danej množiny je párna ak má párny počet prvkov, v opačnom prípade povieme že je nepárna (prázdna množina je párna). Dokážte, že pre neprázdnu množinu sa počet jej párnych podmnožín zhoduje s počtom jej nepárnych podmnožín.
   Symbolicky, $\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k+1}$, pre $n > 0$.

8. Pomocou predchádzajúceho príkladu dokážte, že pre $n > 0$ platí $\sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

9. Uvažujme slová v abecede 0, 1, ktoré majú m jednotiek a n núl. Určte počet slov, ktoré obsahujú presne k bežcov.(Bežcom rozumieme maximálny reťazec po sebe idúcich jednotiek. Napr. slovo 10111100111110 má troch bežcov.)

10. Kombinatorickou úvahou dokážte: Pre celé číslo $n \geq 1$ a celé kladné číslo x platí
    $$(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = x^n - 1.$$
    Pomôcka: dvomi spôsobmi určte počet takých slov dĺžky n v abecede $\{1, \dots, x\}$ ktoré majú aspoň jednu zložku rôznu od x.

11. Pre kladné celé číslo n je hodnota Eulerovej funkcie $\phi(n)$ definovaná ako počet tých kladných celých čísel neprevyšujúcich n, ktoré sú s n nesúdeliteľné, pričom kladieme $\phi(1) = 1$. Napríklad, $\phi(2) = 2, \phi(3) = 2, \phi(4) = 2, \phi(8) = 4, \phi(15) = 8$, pre prvočíslo p máme $\phi(p) = p - 1$. Dokážte, že pre každé $n > 2$ je hodnota $\phi(n)$ párne číslo.

12. Je dané prvočíslo $p > 2$ a prirodzené číslo n. Koľkými spôsobmi je možné zafarbiť vrcholy pravidelného p-uholníka n farbami? Spôsoby pri ktorých sa po otočení p-uholníka farby zhodujú nepovažujeme za rôzne.