Lineárna algebra a geometria I. – prednáškové úlohy č. 1 a č. 2

Cvičenia 30. septembra 2015 - Zobrazenia, Binárne operácie

---

1. 1.1.19(3) Je zobrazenie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 3x - 1$, surjektívne? Je injektívne?

2. 1.1.19(5) Nech $A = \{a, b\}$ je dvojprvková a $B = \{p, q, r\}$ trojprvková množina. Napíšte všetky injektívne zobrazenia $A \to B$. Jestvuje surjektívne zobrazenie $A \to B$?

3. 1.1.19(7) Pre zobrazenia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definujme ich súčet ako zobrazenie

$$f + g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

a súčin ako zobrazenie

$$f \cdot g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Je súčet, resp. súčin ľubovoľných dvoch bijekcií zo $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Z}$ znova bijekcia?

Nad analogickými otázkami sa zamyslite pre analogicky definovaný súčet, resp. súčin dvoch zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, resp. dvoch zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{Q}$, resp. dvoch zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.

4. 1.1.19(9) Nech zobrazenie $f : A \to B$ je bijektívne. Aký je vzťah medzi obrazom zobrazenia $f^{-1} : B \to A$ a množinou $f^{-1}(B)$ ako vzorom množiny B pri zobrazení f?

5. 1.2.9(1) Na $\mathbb{R}$ definujme binárnu operáciu $*$ predpisom $x * y = x \cdot y^2$ (kde $\cdot$ je násobenie reálnych čísel). Má táto operácia neutrálny prvok? Ak má, nájdite ho. Je operácia $*$ asociatívna? Je komutatívna?

6. 1.2.9.(2) Na trojprvkovej množine $M = \{a, b, c\}$ definujte asociatívnu binárnu operáciu tak, aby bola komutatívna, mala neutrálny prvok a aby ku každému prvku existoval v M inverzný prvok.

7. 1.2.9(4) Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujme operáciu $\cdot$ takto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Dokážte, že operácia $\cdot$ je asociatívna a komutatívna. Nájdite jej neutrálny prvok. Nájdite tie prvky v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ku ktorým jestvuje inverzný prvok; určte tento inverzný prvok.

8. 1.2.9(7) Je binárna operácia $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $*(x, y) = x^2 - y^2$, asociatívna? Je komutatívna?