Lineárna algebra a geometria I. – prednáškové úlohy č. 3 a č. 4

Cvičenia 7. októbra 2015 - Grupy, Podgrupy, Homomorfizmy

---

1. 1.3.6(3) Dokážte, že grupa $(G, \cdot)$ je komutatívna, ak $x \cdot x = 1$ pre každé $x \in G$.
Návod: pouvažujte o $(x \cdot y) \cdot (y \cdot x)$.

2. 1.3.6(4) Dokážte, že nenulové komplexné čísla s operáciou zvyčajného násobenia tvoria grupu.

3. 1.3.6(8) Nech $(G, \cdot)$ je grupa. Dokážte, že jediný prvok $x \in G$ taký, že $x \cdot x = x$ je neutrálny prvok.

4. 1.4.6(1) Označme L množinu komplexných čísel, ktoré majú absolútnu hodnotu 2. Zistite, či je L podgrupou grupy nenulových komplexných čísel s operáciou násobenia.

5. 1.4.6(4) Nech $(G, \cdot)$ je grupa a $H \neq \emptyset$ je konečná podmnožina v G taká, že súčin prvkov z H znova patrí do H. Dokážte, že H je podgrupa grupy G.
Návod: pre $x \in H$ uvažujte o prvkoch x, $x \cdot x$, $x \cdot x \cdot x$, $\dots$.

6. 1.4.6(6) Dokážte, že prienik dvoch podgrúp danej grupy je tiež jej podgrupou.

7. 1.4.6(9) Dokážte, že grupa celých čísel s operáciou sčitovania má nekonečne veľa podgrúp.

8. 1.5.17(1) Prečo sa nedajú nájsť také dve grupy G, H, aby nejstvoval žiadny homomorfizmus z G do H?

9. 1.5.17(3) Prečo nemôže jestvovať epimorfizmus z grupy racionálnych čísel s operáciou sčitovania na grupu celých čísel s operáciou sčitovania.
Návod: taký epimorfizmus by musel voľaktoré číslo $p/q \in \mathbb{Q}$ zobraziť na 1. Pouvažujte, aké by to malo následky.

10. 1.5.17(4) Nech $(\mathbb{Z}_2, +)$ je grupa zvyškov celých čísel po delení číslom 2 (poz. 1.3.4.(3)). Dokážte, že každý homomorfizmus zo $\mathbb{Z}_2$ do grupy Z s operáciou sčitovania zobrazí $1 \in \mathbb{Z}_2$ na $0 \in \mathbb{Z}$.

11. Dôkaz vety 1.6.9: Pre každú podgrupu H grupy celých čísel s operáciou sčitovania jestvuje celé nezáporné číslo m také, že $H = m\mathbb{Z}$.

12. 1.6.12(1) Nech M, S sú neprázdne množiny (nemusia byť rôzne) a nech $f : M \to S$ je zobrazenie. Definujme reláciu $\sim$ na M takto: $x \sim y$, ak $f(x) = f(y)$. Dokážte, že $\sim$ je relácia ekvivalencie.