

1. 1.6.12(4) Nech G je konečná abelovská grupa a H je jej podgrupa. Môže mať faktorová grupa G/H viac prvkov ako grupa G ?

2. 1.6.12(5) Dokážte, že $\{0, 2\}$ je podgrupa grupy zvyškov $\mathbb{Z}_4$. Aké prvky má faktorová grupa $\mathbb{Z}_4/\{0, 2\}$? Je grupa $\mathbb{Z}_4/\{0, 2\}$ izomorfná s grupou $\mathbb{Z}_2$?

3. 1.6.12(6) Nech G je komutatívna grupa a H jej podgrupa. Dokážte, že predpis, ktorý $g \in G$ priradí $[g] \in G/H$ definuje epimorfizmus $p : G \rightarrow G/H$ (p sa volá *kanonická projekcia* grupy G na faktorovú grupu G/H). Čo je $\ker(p)$?

4. Dôkaz vety 1.7.6: Nech $m \in \mathbb{N}$ je aspoň 2. Potom okruh $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ je poľom práve vtedy, keď m je prvočíslo (teda práve vtedy, keď m nemá okrem 1 a m iné delitele).

5. 1.7.8(2) Dokážte, že reálne čísla $x + y\sqrt{2}$, kde $x, y \in \mathbb{Z}$, tvoria okruh (so zvyčajným sčítaním a násobením čísel).

6. 1.7.8(5) Majme v poli $a \cdot x = a \cdot y$ pre nejaké $a \neq 0$. Dokážte, že potom $x = y$.

7. 1.7.8(7) Na $\mathbb{R}^2$ definujme operácie $+$ resp. $\cdot$ takto: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ resp. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$. Je $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ poľom?

8. 1.7.8(10) Pre každý prvok a komutatívneho okruhu R s jednotkou 1 definujme jeho n -tú ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) mocninu indukčne: $a^0 = 1$, $a^n = a^{n-1} \cdot a$. Dokážte, že

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$