Lineárna algebra a geometria I. – prednáškové úlohy č. 9 a č. 10

Cvičenia 28. októbra 2015 - Sústavy, Lineárna závislosť, Lineárny obal

---

1. 2.2.9(2) Vyriešte nad $\mathbb{R}$ lineárny systém

$$4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2$$
$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1$$
$$2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1.$$

2. 2.2.9(3) Vyriešte nad $\mathbb{R}$ lineárny systém

$$\alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1.$$

v závislosti od parametra α.

3. 2.2.9(5) Nájdite všetky $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré je vektor $(5, 9, a) \in \mathbb{R}^3$ lineárnou kombináciou $(5, 2, 1)$, $(4, 1, 6)$ a $(1, 4, 3)$.

4. 2.2.9(6) Nájdite všetky $t \in \mathbb{R}$, pre ktoré vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^3$

$$[(3, 2, 5), (5, 6, t), (2, 4, 7)] = [(3, 2, 5), (5, 6, t), (2, 4, 7), (1, 3, 5)].$$

5. 2.2.9(7) Nájdite všetky hodnoty parametra α pre ktoré je reálny systém

$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1$$
$$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3$$
$$8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9$$
$$7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \alpha$$

neriešiteľný.

6. 2.3.14(3) Zistite ktoré z nasledujúcich množín vektorov v $\mathbb{R}^4$ sú lineárne závislé resp. nezávislé:

$$A = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 3, 2, 3), (1, 1, 2, 1)\},$$
$$B = \{(1, -1, 1, -1), (1, 2, 1, -1), (1, -3, 2, 3), (-1, 1, -2, 1)\},$$
$$C = \{(1, 1, 1, -1), (1, -2, 1, -1), (1, -3, 2, -3), (-1, 1, -2, -1)\},$$
$$D = \{(1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12), (13, 14, 15, 16)\}.$$

7. 2.3.14(4) Zistite ktoré z nasledujúcich množín vektorov v $(\mathbb{Z}_5)^4$ sú lineárne závislé resp. nezávislé:

$$A = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 3, 2, 3), (1, 1, 2, 1)\},$$
$$B = \{(1, -1, 1, -1), (1, 2, 1, -1), (1, -3, 2, 3), (-1, 1, -2, 1)\},$$
$$C = \{(1, 1, 1, -1), (1, -2, 1, -1), (1, -3, 2, -3), (-1, 1, -2, -1)\}.$$

8. 2.3.14(5) Sú $1, t, t^2, t^3 \in \mathbb{R}[t]$ lineárne nezávislé? Sú $2 - t, 1, t, t^2, t^3 \in \mathbb{R}[t]$ lineárne závislé?

9. 2.3.14(9) Overte v $\mathbb{C}^3$ rovnosť

$$[(1, i, -1), (1, i, i)] = [(1, i, -1), (1, i, i), (1 + i, 1 - i, -2)].$$

10. 2.3.14(11) Dokážte, že ak $\mathbb{R}$ chápeme ako vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$, tak vektory 1 a x sú v $\mathbb{R}$ lineárne nezávislé práve vtedy, keď číslo x je iracionálne.